Das Kontrollexperiment (Immersion von blankem Titanmetall, in SCS, d. h. ohne vorheriges Ätzen) zeigt keine Calciumphosphat-Abscheidung.
Auf die besonderen Gefahren bei der Handhabung von brennbaren Lösungsmitteln (Aceton, Ethanol) und ätzenden Flüssigkeiten (H_2O_2, KOH) sei hier ausdrücklich hingewiesen. Die Calcifizierungslösung kann anschließend im Abwasser entsorgt werden.

Ergebnis: Siehe Abbildung 10.

Weiterführende Literatur

S. MANN: Biomineralisation: Ein neuer Zweig der bioanorganischen Chemie.– Chem. Unserer Zeit **20** (1986) 69–76.

H. A. LOWENSTAM – S. WEINER: On biomineralization.– New York: Oxford University Press 1989.

D. VOLKMER: Von Biomineralien zu biomimetischen Materialien: Der Weg ist das Ziel.– Chem. Unserer Zeit **33** (1999) 6–19.

S. V. DOROZHKIN – M. EPPLE: Die biologische und medizinische Bedeutung von Calciumphosphaten.– Angew. Chem. **114** (2002) 3260–3277.

E. WINTERMANTEL – S. W. HA: Medizintechnik mit biokompatiblen Werkstoffen und Verfahren.– Berlin, Heidelberg: Springer 2002.

M. EPPLE: Biomaterialien und Biomineralisation. Eine Einführung für Naturwissenschaftler, Mediziner und Ingenieure.– Wiesbaden: Teubner 2003.

Prof. Dr. MATTHIAS EPPLE, Institut für Anorganische Chemie, Universität Duisburg-Essen, Campus Essen, Universitätsstr. 5–7, 45117 Essen, matthias.epple@uni-essen.de, befasst sich u.a. mit der Untersuchung der Struktur von natürlichen Biomineralien unter Anwendung physikalisch-chemischer Methoden (auch mittels Synchrotron-Strahlung) und der Nachahmung der biologischen Kristallisation im Labor (Ausfällung anorganischer Mineralien in Gegenwart biologischer Fremdstoffe). Daneben beschäftigt er sich mit der Herstellung von Biomaterialien auf Calciumphosphat- und auf Polymerbasis für den Einsatz in der Orthopädie und der Mund-Kiefer-Gesichtschirurgie.

HANS-OTTO CARMESIN

Das Nash-Gleichgewicht

Extremwertprobleme und Funktionenscharen im 11. Jahrgang

(Dieser Aufsatz ist BERTHOLD RIEGER zum 65. Geburtstag gewidmet.)

Extremwertaufgaben im 11. Jahrgang behandeln oft eine Person, die ihren Gewinn maximiert. Werden aber Gewinne für zwei oder mehr miteinander handelnde Parteien gesucht, so können Schüler das Gleichgewicht entdecken, für dessen Erfindung JOHN NASH 1994 den Nobelpreis für Ökonomie erhielt. Die Schüler praktizieren in diesem Zusammenhang unterschiedliche mathematische Kompetenzen, entwickeln Funktionenscharen und lernen interessante Anwendungen kennen.

1 Einleitung

Im Jahr 2002 kam der Film »A Beautiful Mind« in die Kinos, wurde mit vier Oscars prämiert und ist heute auch als Video oder DVD erhältlich. Er handelt von JOHN F. NASH junior, wie er das heute nach ihm benannte Gleichgewicht [1], [2] entdeckte, später an Schizophrenie erkrankte, mithilfe seiner Frau und seiner Freunde weitgehend geheilt wurde und 1994 für seine Arbeiten zum Nash-Gleichgewicht den Nobel-Preis für Wirtschaftswissenschaften erhielt. Das Thema, das die Schüler sehr motivierte, wurde vom Autor in zwei 11. Klassen erprobt.[1]

2 Ein Hersteller setzt den Preis fest

In der ersten Stunde der Unterrichtseinheit wurde den Schülern folgende Extremwertaufgabe präsentiert:
Vorbereitungsaufgabe: Der Maschinenbauer XAVER hat ein Bauteil patentieren lassen und daher ein Monopol. Die Grundnachfrage beträgt 100 Stück, wobei alle Angaben pro Tag und in Euro abgefasst sind. Es gibt eine Nachfrageverringerung von 1 Stück pro Euro des Preises. Die Kosten betragen 20 € pro Stück. Bestimmen Sie den maximal möglichen Profit!
Die Schüler lösten das Problem mit Hilfe weniger gestufter Lernhilfen: Bei einem Preis x gilt für die Nachfrage (demand) $d(x) = 100 - x$. Der Gewinn pro Stück ist der Unterschied zwischen Preis und Kosten: $x - 20$. Multiplizieren wir diesen mit der Nachfrage, so erhalten wir

[1] Unterrichtsmaterialien werden gerne auf Anfrage – am einfachsten per Email – versandt.

MNU 57/7 (15. 10. 2004) Seite 410–413 ISSN 0025-5866

den Profit $p(x) = (100 - x)(x - 20)$. Diese Funktion stellt die Zielfunktion dar und wird maximiert. Hier wie bei allen anderen Extremwertbestimmungen wurde die zugehörige hinreichende Bedingung überprüft. Das Maximum liegt bei $x = 60$ und ist $p(60) = 1600$. So entdeckten die Schüler in der ersten Unterrichtsstunde ein Verfahren zur Lösung einfacher Extremwertaufgaben.

3 Zwei konkurrierende Hersteller setzen Preise fest

Ausgehend von der obigen Aufgabe erhielten die Schüler in der zweiten Stunde folgende **Erweiterungsaufgabe:** Der Maschinenbauer XAVER aus der Extremwertaufgabe setzt einen Preis x fest und erzielt einen Profit p_x. Ein Fabrikant YOSEF hat ein gleichwertiges Bauteil patentieren lassen. Dessen Herstellung kostet ebenfalls 20 €. Die Grundnachfrage beträgt jetzt bei beiden Produzenten 70 Stück. Bei jedem verringert sich die Nachfrage um 1 je Euro des eigenen Preises und erhöht sich um 0,5 je Euro des Preises des Konkurrenten.

a) Wie optimiert Herr XAVER seinen Preis, nachdem Herr YOSEF seinen auf $y = 90$ € festgesetzt hat?

b) Wie optimiert daraufhin Herr YOSEF seinen Preis?

c) Was passiert, wenn sich dieser Prozess fortsetzt?

Die Schüler erkannten, dass Teil a) eine Extremwertaufgabe darstellt, und lösten diese ähnlich wie die vorbereitende Aufgabe: Herr XAVER bestimmt seine Nachfrage

$$ {}_xd = 70 - x + 0{,}5y = 115 - x, $$

seinen Profit pro Stück zu $x - 20$ und seine Zielfunktion

$$ {}_xp = (x - 20) \cdot (115 - x) = -x^2 + 135x - 2300. $$

Er optimiert diese für $x = 67{,}5$.

Zu Aufgabenteil b) lösten die Schüler die entsprechende Extremwertaufgabe für YOSEF, wobei XAVERS Preis 67,5 € vorgegeben war. Sie erhielten so für YOSEF den Preis 61,88 €. Zu Teil c) berechneten die Schüler im Wechsel einen neuen Preis x für Herrn XAVER und y für Herrn YOSEF. Dabei erhielten sie die Tabelle 1.

x	67,5	67,5	60,47	60,47	60,03	60,03	60,00	60,00
y	90	61,88	61,88	60,12	60,12	60,01	60,01	60,00

Tab. 1. Ermittlung des Nash-Gleichgewichts

So entdeckten die Schüler in der zweiten Stunde selbstständig ein Gleichgewicht der Preise bei 60 €. Es ist ein Nash-Gleichgewicht: *»Eine Menge von Strategien und die zugehörigen Profite stellen ein Nash-Gleichgewicht dar, wenn kein Spieler von einer Änderung seiner Strategie profitiert, solange die übrigen Spieler ihre Strategien beibehalten.«*

4 Reaktionsgleichungen

Nachdem die Schüler das Nash-Gleichgewicht durch Iteration entdeckt hatten, sollten sie ein direktes Lösungsverfahren entwickeln. Hierzu erhielten sie folgenden Arbeitsauftrag.

Aufgabe 3: Gesucht ist eine Gleichung, mit welcher der Preis x bei vorgegebenem Preis y direkt berechnet werden kann. Gesucht ist dann eine Gleichung zur Berechnung von y bei vorgegebenem x.

Mit wenigen gestuften Lernhilfen merkten die Schüler, dass sie das Extremwertproblem zur Bestimmung von x bei als vorgegeben gedachtem aber variablem y lösen sollten. Nachdem dieses Ziel klar war, gelang ihnen die Bestimmung der Gleichung für x wie folgt: Herr XAVER bestimmt seine Nachfrage ${}_xd = 70 - x + 0{,}5y$, seinen Profit pro Stück zu $x - 20$ und seine Zielfunktion

$$ {}_xp(x) = (x - 20) \cdot (70 - x + 0{,}5y) $$
$$ = -x^2 + 90x + 0{,}5xy - 1400 - 10y. $$

Hier mussten sich die Schüler klar machen, dass y als gegeben gedacht wird und dass daher ${}_xp$ eine Funktion von x darstellt. An dieser Stelle könnte man den Begriff Funktionenschar einführen mit dem Parameter y. Dann wäre die übliche Schreibweise

$$ {}_xp_y(x) = -x^2 + 90x + 0{,}5xy - 1400 - 10y. $$

Im Unterricht wurde dieser Begriff an dieser Stelle nicht eingeführt. In Zukunft würde der Autor dies aber tun, da im Test (s. u.) drei Schüler Schwierigkeiten hatten, bezüglich der richtigen Variablen abzuleiten.

$$ {}_xp'_y(x) = -2x + 90 + 0{,}5y. $$

Nullsetzen und Auflösen führte zu $x = 45 + 0{,}25y$. Entsprechend bestimmten die Schüler die Gleichung $y = 45 + 0{,}25x$.

Diese beiden Gleichungen werden Reaktionsgleichungen genannt. Auf die Frage, wie man denn nun mithilfe dieser beiden Gleichungen das Gleichgewicht bestimmen kann, kam der Vorschlag das Gleichungssystem zu lösen. Die Schüler setzten ein und erhielten $x = 60$. So entwickelten sie in der dritten Stunde das Verfahren zur Bestimmung des Gleichgewichts mithilfe von Reaktionsgleichungen und von einer rechnerischen oder zeichnerischen Lösung des Gleichungssystems.

5 Unterschiedliche Kosten

In der vierten Stunde wurde zur Übung und zur Vorbereitung einer späteren Entdeckung folgende Aufgabe gestellt:

Aufgabe 4: Bei Herrn YOSEF sind die Kosten pro Stück auf 50 € gestiegen. Bestimmen Sie das Nash-Gleichgewicht!

Die Schüler erarbeiteten ohne Schwierigkeiten die richtige Lösung: $y = 76$, $x = 64$, ${}_yp = 676$, ${}_xp = 1936$.

6 Lizenzgebühr

In der vierten Stunde wurde folgende Aufgabe bearbeitet:

Aufgabe 5: Der Maschinenbauer XAVER aus der ersten Extremwertaufgabe hat sein Patent an eine Erfinderin YASMIN verloren. Diese kann jetzt für jedes verkaufte Stück von Herrn XAVER eine Lizenzgebühr y verlan-

gen. Diese lässt sich Herr XAVER zusätzlich zum Preis x vom Kunden bezahlen. Dadurch ist die Nachfrage nun $d = 100 - x - y$. Bestimmen Sie das Nash-Gleichgewicht!
Die Schüler entdeckten, dass beide im Gleichgewicht den gleichen Profit erzielen:
$x = 140/3$, $y = 80/3$, ${}_yp = 6400/9 = {}_xp$.
Wir stellten fest, dass man entsprechende Ergebnisse auch bei Steuern oder Zöllen erhält.

7 Mehrere Nash-Gleichgewichte

In der fünften Stunde wurde die Problemstellung erweitert.
Aufgabe 6: Zwei Telefongesellschaften A und B bauen ihre Netzwerke auf und richten dabei x beziehungsweise y Anschlüsse ein. Die Gesellschaft A kostet das $1000x + 25x^2$ Euro und es bringt ihr für jede mögliche Verbindung zweier Teilnehmer 20 € ein, also insgesamt $20 \cdot (x^2 + x \cdot y)$ Euro. Entsprechend betragen für B die Ausgaben $1000y + 25y^2$ und die Einnahmen $20 \cdot (y^2 + x \cdot y)$ Euro. Jede Gesellschaft kann zwischen 0 und 300 Anschlüssen einrichten. Bestimmen Sie alle Nash-Gleichgewichte!
Die Schüler bestimmten durch Lösen des Systems der Reaktionsgleichungen folgendes Nash-Gleichgewicht richtig: $x = 100 = y$, ${}_yp = 50000 = {}_xp$. Als Hausaufgabe sollten sie durch Iteration nach weiteren Gleichgewichten suchen und entdeckten so die zwei fehlenden Nash-Gleichgewichte: $x = 0 = y$, ${}_yp = 0 = {}_xp$ und $x = 300 = y$, ${}_yp = 1050000 = {}_xp$.

8 Maximierung der Summe der Profite

In der sechsten Stunde sollten die Schüler für die Hersteller aus der zweiten Stunde die Summe der Profite optimieren und nannten die Zielfunktion $p = {}_xp + {}_yp$ und den Term:

$$p = -x^2 - y^2 + xy + 80x + 80y - 2800.$$

Die Schüler erkannten, dass man für jedes Paar $(x; y)$ einen Wert für p bestimmen kann. Jetzt wurde der folgende Hinweis notwendig: Ein Weg durch das Maximum, der parallel zur x-Achse verläuft, weist beim Maximum einen Hochpunkt auf. Daher ist die Ableitung des Ausdrucks für p gleich null, wenn man beim Ableiten y als Konstante auffasst. Entsprechend ist die Ableitung des Ausdrucks für p gleich null, wenn man beim Ableiten x als Konstante auffasst. Anschließend lösten die Schüler das Problem:

$$p_y'(x) = -2x + y + 80 = 0.$$

Auflösen ergab $x = 0{,}5y + 40$. Entsprechend erhielten die Schüler $y = 0{,}5x + 40$. Am Maximum für p gelten beide Gleichungen. Die Lösung des Systems ergab: $x = 80 = y$, $p = 3600$, ${}_xp = 1800 = {}_yp$. Den Schülern fiel auf, dass der Profit beim Nash-Gleichgewicht mit 1600 € um 200 € niedriger liegt. Beim Vergleich mit dem Film wurde den Schülern klar, dass die Produzenten XAVER und YOSEF nicht den optimalen Profit erhalten, wenn jeder nur seinen eigenen Profit maximiert. Diese Erkenntnis steht im Gegensatz zur Theorie des einflussreichen Ökonomen ADAM SMITH. Im Film wurde diese Einsicht als das Schlüsselerlebnis von JOHN NASH bei der Entwicklung seiner Theorie dargestellt. Als Hausaufgabe bestimmten die Schüler die optimale Lösung für die Aufgabe mit unterschiedlichen Kosten (s. o.) und erlebten noch eine andere Überraschung.

9 Schriftliche Überprüfung

In der siebten Stunde gab es weitere Übungen und in der achten Stunde schrieben die Schüler folgende Klausur über 45 Minuten:

1. Herr XAVER produziert ein Bauteil zu einem Selbstkostenpreis von 26 € je Stück. Seine Konkurrentin YASMIN baut ein gleichwertiges Teil zu einem Selbstkostenpreis von 36 € je Stück. Die Grundnachfrage beträgt je 80 Stück. Sie verringert sich um 1 Stück je Euro des eigenen Verkaufspreises und erhöht sich um 0,5 Stück je Euro des Preises der Konkurrenz.
   a) Frau Yasmin bietet ihr Produkt zu $y = 30$ € das Stück an. Bestimmen Sie den optimalen Preis x für Herrn XAVER!
   b) Bestimmen Sie das Nash-Gleichgewicht!
   c) Bestimmen Sie die maximalen Profite ${}_xp$ und ${}_yp$, die bei Absprache möglich sind!
2. Drei Anbieter XENIA, YOSEF und ZIMMERMANN stellen ein Gerät her. Bei jedem betragen die Produktionskosten 20 € je Stück. Die Nachfragen sind: ${}_xd = 100 - x + 0{,}4y + 0{,}4z$, ${}_yd = 100 - y + 0{,}4x + 0{,}4z$, ${}_zd = 100 - z + 0{,}4x + 0{,}4y$. Bestimmen Sie die Reaktionsgleichungen!

Die Schüler bewältigten den Test überraschend gut mit einem Mittelwert von 10,8 Punkten. Im Einzelnen sind die Punkte in Tabelle 2 aufgeführt.
Bei der Aufstellung der Gleichungen für Profite erzielten die Schüler 94 % der erreichbaren Punkte, bei der Bestimmung der Reaktionsgleichungen 95 %. Bei den übrigen Teilen von 1a, 1b, 1c und 2 erhielten sie 66 %, 80 %, 58 % und 78 % der erreichbaren Punkte. Das relativ schlechte Abschneiden bei 1a kam dadurch zustande, dass viele Schüler etwas zu wenig Zeit hatten und anfangs diese Aufgabe übersprangen. Die globale Optimierung in 1c machte wegen der unterschiedlichen Ableitungen Schwierigkeiten, ein Problem das möglicherweise durch Einführung der Funktionenschar behebbar ist (s. o.). Das generell gute Ergebnis

Punkte	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Anzahl	7	1	2	1	2	2	1	2	0	1	0	0	2	1	0	0

Tab. 2. Ausfall des Tests

lässt sich wohl auf eine hohe Motivation der Schüler zurückführen. Der Test war nicht zu einfach, da der Stoff der Einheit ganz abgedeckt ist und weil mit der Aufgabe 2 auch der Anforderungsbereich 3 enthalten ist, denn wir hatten im Unterricht nie mehr als zwei Konkurrenten betrachtet.

10 Zusammenfassung

Die Einheit ist für einen 11. Jahrgang nicht zu schwierig und nicht zuletzt wegen des Nobelpreises, des Films, der vielen Entdeckungsmöglichkeiten und der zahlreichen interessanten Anwendungen motivierend. Mit dem Thema lassen sich Extremwertprobleme und Funktionenscharen einführen. In einer Lerngruppe mit besonders begabten Schülern könnte man das Nash-Gleichgewicht bereits in der 9. Klassenstufe im Zusammenhang mit den Themen »Quadratische Funktionen« oder »Lösen linearer Gleichungssysteme« einsetzen. Denn die kompliziertesten mathematischen Operationen der Einheit sind die Bestimmung des Maximums einer quadratischen Funktion und das Lösen eines linearen Gleichungssystems.

Literatur

[1] J. F. NASH: Equilibrium Points in N-Person Games. – Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **36** (1950) 48.

[2] J. F. NASH: Non-Cooperative Games. – Annals of Mathematics **54** (1951) 286–295.

PD Dr. HANS-OTTO CARMESIN, Hans-Otto.Carmesin@t-online.de, unterrichtet die Fächer Mathematik, Physik und Informatik am Gymnasium Athenaeum, Harsefelder Straße 40, 21680 Stade.

F. THEILMANN – G. MAIER

Lichtgeschwindigkeit im Kontext der modellfreien Optik

Modellfreie Optik erklärt die optischen Erscheinungen nicht durch Konzepte, die selbst unwahrnehmbar sind: Es wird etwa über »eigenhelle« Bilder oder die herrschenden Sichtverhältnisse gesprochen, die sich durch eigenes Schauen feststellen lassen, nicht aber über nur vorgestellte Konzepte wie »Lichtstrahlen« oder »Licht als ein strömendes Etwas«, die gar nicht in Erscheinung treten [1, 2, 3]. Beleuchtungsverhältnisse und Abbildungsoptik, aber auch Beugung und Polarisation lassen sich so systematisch darstellen und erschliessen (vgl. etwa [4, 5]); dieser Zugang war lange eine Spezialität der Waldorfpädagogik, findet aber zunehmend auch in der »konventionellen« Didaktik Interesse (z. B. [6, 7]). Offen war in diesem Rahmen aber bislang, welchen Platz die Lichtgeschwindigkeit einnimmt – Licht möge ja gerade nicht als Transport- oder Bewegungsvorgang verstanden werden, also was soll dann eine Geschwindigkeit haben? Dieser Beitrag soll Wege zeigen, auf denen sich im Kontext des modellfreien Ansatzes Antworten finden lassen. Es wird ein klassisches Experiment zur Lichtgeschwindigkeit gründlich studiert und es zeigt sich, dass die Vorstellung einer Bewegung des Lichtes keineswegs zwangsläufig ist. Für ein gründliches Verständnis des Versuchs reichen Kenntnisse der phänomenologischen Optik, wie sie der Oberstufenunterricht an Waldorfschulen vermitteln mag, aus. Die Deutung der Ergebnisse als eine aktuelle Sichtverbindung ist im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie nicht komplizierter als eine kinematische Deutung mit sich bewegendem Licht. Der vorgestellte Ansatz lässt sich dabei auf alle uns bekannten Experimente zur Lichtgeschwindigkeit verallgemeinern. Der Beitrag versteht sich auch als Beispiel für eine »nicht-affirmative« Art, Physik zu treiben [8].

1 Das Drehspiegel-Experiment

Wie sieht ein typisches Experiment aus, in dem eine Bewegung von Licht (sei es als wellenartig, sei es als teilchenartig vorgestellt) nachgewiesen werden soll? Ein klassischer Versuch dazu ist die Messung der Lichtgeschwindigkeit nach MICHELSON-FOUCAULT mit der Drehspiegelmethode. Die Grundidee ist ebenso einfach wie pfiffig (vgl. Schema in Abb. 1): Man beleuchtet einen Spiegel (»Endspiegel E«) über einen zweiten Spiegel, der sich schnell drehen kann (»Drehspiegel D«). Das Licht wird an E gespiegelt, fällt zurück auf D und wird als heller Strich auf einer Skala beobachtet. Rotiert der Drehspiegel, ändert sich der Ort des Strichs auf der Skala: Das Zurücklegen des Weges