Arbeitsblatt Spieltheorie (ab Klasse 7)

➔ Allgemeine Informationen zur Spieltheorie finden Sie auf Seite 4

MÖGLICHE LÖSUNG FÜR ACHTKLÄSSLER

Zu 1) Die Gewinnfunktion ist
$\alpha = (a - 1) \cdot (19 - a) = -a^2 + 20a - 19$.
Der Scheitelpunkt der quadratischen Gleichung ist $(a \mid \alpha) = (10 \mid 81)$. Der optimale Preis beträgt 10 Euro und führt zu einem täglichen Gewinn von 81 Euro.

Zu 2) Annis Gewinnfunktion ist
$\alpha = (a - 1) \cdot (10 - 2a + b) = 24$
und Max gewinnt täglich
$\beta = (b - 1) \cdot (10 - 2b + a) = 7$ Euro.

Zu 4) Anni möchte die Differenz $d = \alpha - \beta$ maximieren. Ihre Zielfunktion ist also
$d = (a - 1) \cdot (10 - 2a + b) - (b - 1) \cdot (10 - 2b + a)$
$= -2a^2 + 12a - 12b + 2b^2$. Anni bestimmt ihren Preis am Scheitelpunkt $a = 3$.
Max rechnet genauso und legt den gleichen Preis $b = 3$ fest. Die Gewinne sind $\beta = \alpha = 14$.

Zu 6) Anni errechnet ihre Gewinnfunktion
$\alpha = (a - 1) \cdot (10 - 2a + b) = -2a^2 + 12a - 10 + ab$.
Sie bestimmt ihren Preis am Scheitelpunkt $a = 3 + \frac{b}{4}$ (Reaktionsgleichung). Max bestimmt analog seinen Preis am Scheitelpunkt $b = 3 + \frac{a}{4}$ (Reaktionsgleichung). Die Preise nähern sich im Spiel dem Nash-Gleichgewicht an. Das Nash-Gleichgewicht wird durch die simultane Lösung der beiden Reaktionsgleichungen bestimmt und ergibt die Preise $a = b = 4$ und die Gewinne $\beta = \alpha = 18$.

➔ Eine ausführlichere Lösung und alternative Lösungswege für die Klassen 7, 10 und 11 finden Sie unter www.mint-zirkel.de

Dr. Hans-Otto Carmesin studierte in Mainz und unterrichtet seit 1999 am Gymnasium Athenaeum in Stade Mathematik und Physik. Er ist Fachleiter am Studienseminar in Stade. Er engagiert sich für die Fachdidaktik, Jugend forscht-Projekte, eine Herbstakademie, eine Schüler-Ingenieur-Akademie sowie für eine fachliche Koordinierung mit Hochschulen zur Prophylaxe von Studienabbrüchen.

Anni und Max erleben Nash-Gleichgewichte

Anni und Max haben zusammen eine neuartige Speicherkarte erfunden. Sie beschließen diese herzustellen und zu vermarkten. Doch bei den Planungen zerstreiten sie sich. Nun produziert und verkauft jeder einzeln. Anni ist schneller und verkauft zunächst alleine. Welchen Preis a soll sie verlangen? Die Herstellung kostet einen Euro pro Stück. Die tägliche Grundnachfrage beträgt 19 Stück. Eine Marktanalyse hat ergeben: Wenn ein Preis von a Euro verlangt wird, dann verringert sich die Nachfrage um a Stück. Also beträgt die tägliche Nachfrage $19 - a$.

1. Berechne den Preis a, bei dem Annis Gewinn α maximal ist.

Inzwischen produziert auch Max. Nun haben beide eine tägliche Grundnachfrage von 10 Stück. Die tägliche Nachfrage verringert sich für jeden Euro des eigenen Preises um zwei Stück. Wenn der eine Konkurrent den Preis erhöht gewinnt der andere Kunden hinzu, daher steigt die tägliche Nachfrage für jeden Euro des Konkurrentenpreises um ein Stück. Also beträgt die tägliche Nachfrage bei Anni nun $10 - 2a + b$.

2. Berechne die Gewinne α von Anni und β von Max für die Preise $a = 7$ Euro von Anni und $b = 8$ Euro von Max.

3. Spiele nach folgendem **Grundschema**: Suche dir einen Spielpartner. Einer spielt Anni, einer Max. Bei der ersten, dritten und fünften Runde schreibt erst Anni ihren Preis a offen auf und daraufhin bestimmt Max seinen Preis b. Bei der zweiten, vierten und sechsten Runde schreibt erst Max seinen Preis b offen auf und anschließend bestimmt Anni ihren Preis a. Am Ende jeder Runde wird ausgewertet, indem die beiden Gewinne α und β berechnet und gutgeschrieben werden. Nach sechs Runden ist das Spiel beendet.

Bei dieser Aufgabe 3 gewinnt der Spieler mit der größeren Summe der Gewinne α oder β.

4. Berechne den optimalen Preis für das Spiel in Aufgabenteil 3.

Anni und Max begegnen sich zufällig im Bus. Anni beschwert sich, dass Max seine Preise so festlege, dass sie wenig Gewinn macht. Max sagt, sie sei auch nicht besser. Beide einigen sich, nur noch den eigenen Gewinn zu maximieren, ohne einen Vorsprung vor den anderen erzielen zu wollen.

5. Spiele nach dem Grundschema aus Aufgabe 3. Bei dieser Aufgabe 5 bestimmt jeder Spieler den Preis so, dass er einen möglichst hohen Gewinn α oder β erzielt. Jeder lässt sich von seinen Eltern für jeden Euro der Gewinnsumme ein Gummibärchen geben. Es wird kein Sieger ermittelt.

6. Berechne den optimalen Preis für das Spiel in Aufgabenteil 5.

An einem sonnigen Tag begegnen sich unverhofft Anni und Max im Schwimmbad und spielen Wasserball. Da vertragen sie sich wieder. Sie vereinbaren den gleichen Preis festzusetzen und versichern sich gegenseitig, dass jeder darauf vertrauen kann, dass der andere keinen versteckten Rabatt gewährt.

7. Spiele nach dem Grundschema aus Aufgabe 3. Bei dieser Aufgabe 7 bestimmt jeder Spieler den Preis so, dass er einen möglichst hohen Gewinn α oder β erzielt oder so, dass er die Vereinbarung der Preisgleichheit einhält. Jeder lässt sich von seinen Eltern für jeden Euro der Gewinnsumme ein Gummibärchen geben. Es wird kein Sieger ermittelt.

8. Berechne den optimalen Preis a, den Anni vereinbarungsgemäß festgelegt. Bestimme auch den Preis b, mit dem Max daraufhin seinen Gewinn durch Brechen der Vereinbarung optimieren könnte.

9. Untersuche, bei welchen der drei Spiele Anni und Max ihre Preise am besten entsprechend einem Nash-Gleichgewicht festlegen.

Hinweis: Die Preise befinden sich im Nash-Gleichgewicht, wenn kein Spieler durch eine Preisänderung sein Ziel besser erreicht. Wenn dabei das Ziel ist, einen möglichst großen Vorteil gegenüber dem Konkurrenten zu erreichen, so handelt es sich um ein Nash- Gleichgewicht mit relativen Gewinnen. Ist dagegen das Ziel ein möglichst großer Gewinn, so handelt es sich um ein Nash-Gleichgewicht mit absoluten Gewinnen.

Download des Arbeitsblatts

www.mint-zirkel.de

Hintergrund:
Für die Schule sind Nash-Gleichgewichte sehr gut geeignet, weil sie das Denken anregen, weil sie das Verhalten in Gruppen aussagekräftig analysieren, weil sie gespielt und erlebt werden können und weil sie hervorragende Kontexte für viele Themen des Mathematik-Curriculums sind. Hans-Otto Carmesin hat im Mathematikunterricht Ableitungen am Beispiel des Nash-Gleichgewichts eingeführt. Die Schülerinnen und Schüler waren dabei sehr motiviert und haben hervorragende Klausurergebnisse erzielt (über Einzelheiten hat er in einem Aufsatz berichtet: „Das Nash-Gleichgewicht – Extremwertprobleme und Funktionenscharen im 11. Jahrgang“ In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, Jahrgang 57, Heft 7 (2004), S. 410–413). Auch bei der Untersuchung von Scheitelpunkten und Funktionenscharen hat er gute Erfahrungen mit dem Nash-Gleichgewicht gemacht. Neben den angedeuteten inhaltsbezogenen Kompetenzen können mit dem Nash-Gleichgewicht vor allem die prozessbezogenen Kompetenzen „mathematisch Modellieren“, „mathematisch Argumentieren“, „mathematisch Probleme Lösen“ sowie „mit symbolischen, formalen und technischen Elementen Umgehen“ entwickelt werden.

Mögliche Lösung für Achtklässler:

Zu 1) Die Gewinnfunktion ist $\alpha = (a-1)\cdot(19-a)=-a^2 + 20a - 19$. Der Scheitelpunkt der quadratischen Gleichung ist $(a|\alpha)= (10|81)$. Der optimale Preis beträgt 10 Euro und führt zu einem täglichen Gewinn von 81 Euro.

Zu 2) Annis Gewinnfunktion ist $\alpha = (a-1)\cdot(10-2a+b)=24$ und Max gewinnt täglich $\beta= (b-1)\cdot (10-2b+a)=7$ Euro.

Zu 4) Anni möchte die Differenz $d = \alpha-\beta$ maximieren. Ihre Zielfunktion ist also $d = (a-1)\cdot(10-2a+b)-(b-1)\cdot(10-2b+a)=-2a^2+12a-12b+2b^2$. Anni bestimmt ihren Preis am Scheitelpunkt a = 3,25. Max rechnet genauso und legt den gleichen Preis b = 3,25 fest. Die Gewinne sind $\beta = \alpha = 15{,}1875$.

Zu 6) Anni errechnet ihre Gewinnfunktion $\alpha = (a-1)\cdot(10-2a+b) =-2a^2+12a-10+ab-b$. Sie bestimmt ihren Preis am Scheitelpunkt a=3+b/4 (Reaktionsgleichung). Max bestimmt analog seinen Preis am Scheitelpunkt b = 3+a/4 (Reaktionsgleichung). Die Preise nähern sich im Spiel dem Nash-Gleichgewicht an. Das Nash-Gleichgewicht wird durch die simultane Lösung der beiden Reaktionsgleichungen bestimmt und ergibt die Preise a=b=4 und die Gewinne $\beta = \alpha = 18$.

Zu 8) Anni geht davon aus, dass die Preise gleich sind und errechnet ihre Gewinnfunktion $\alpha = (a-1)\cdot(10-2a+a) = (a-1)\cdot(10-a) =-a^2+ 11a-10$. Sie bestimmt ihren Preis am Scheitelpunkt a=5,5. Wenn Max vereinbarungsgemäß den gleichen Preis b = 5,5 festsetzt, dann sind die Gewinne $\beta = \alpha = 81/4$. Wenn Max die Vereinbarung bricht, dann beträgt seine Gewinnfunktion $\beta= (b-1)\cdot (10-2b+5{,}5)=-2b^2+17{,}5b-15{,}5$ und er setzt am Scheitelpunkt den Preis 35/8 fest. Damit beträgt sein Gewinn $\beta=729/32=22{,}78125$, während Annis Gewinn nur 486/32=15,1875 ausmacht.

Zu 9) Bei der Aufgabe drei entsteht optimal ein Nash-Gleichgewicht mit relativen Gewinnen mit $(a|b)=(3|3)$ und $(\alpha|\beta)=(14|14)$. Würde beispielsweise Anni ihren Preis von drei auf vier steigern, so würde sie zwar einen Euro mehr gewinnen, jedoch würde Max zwei Euro zusätzlich gewinnen und Anni würde einen relativen Verlust erleiden.

Bei der Aufgabe fünf entsteht optimal ein Nash-Gleichgewicht mit absoluten Gewinnen mit $(a|b)=(4|4)$ und $(\alpha|\beta)=(18|18)$. Denn solange Max seinen Preis b=4 festsetzt, ist für Anni der Preis a=4 optimal. Ebenso ist für Max b=4 optimal, solange a=4 gilt.

Bei der Aufgabe sieben ist die vereinbarte Lösung $(a|b)=(5{,}5|5{,}5)$ und $(\alpha|\beta)=(20{,}25|20{,}25)$ zwar sehr gewinnträchtig, jedoch kein Nash-Gleichgewicht. Denn Max kann durch eine Preissenkung seinen Gewinn steigern, zum Nachteil von Annis Gewinn. Beispielsweise ergibt $(a|b)=(5{,}5|5)$ die Gewinne $(\alpha|\beta)=(18|22)$.

Alternativer Lösungsweg für Siebtklässler: Tabelle eingeschränkt auf ganzzahlige Preise

	a=2	a=3	4	5	6	7
b=2	$(\alpha\|\beta)=(8\|8)$	$(\alpha\|\beta)=(12\|9)$	$(\alpha\|\beta)=(12\|10)$	(8|11)	(0|12)	(-12|13)
b=3	(9|12)	(14|14)	(15|16)	(12|18)	(5|20)	(-6|22)
b=4	(10|12)	(16|15)	(18|18)	(16|21)	(10|24)	(0|27)
5	(11|8)	(18|12)	(21|16)	(20|20)	(15|24)	(6|28)
6	(12|0)	(20|5)	(24|10)	(24|15)	(20|20)	(12|25)
7	(13|-12)	(22|-6)	(27|0)	(28|6)	(25|12)	(18|18)

Alternativer Lösungsweg für Zehntklässler: Berechnung durch Extremwertaufgaben

Alternativer Lösungsweg für Elftklässler: Berechnung durch Funktionenscharen $\alpha_b(a)$ und $\beta_a(b)$