Urknallmechanik im Unterricht

Hans - Otto Carmesin
Hohenwedeler Weg 136, 21682 Stade
Gymnasium Athenaeum, Harsefelder Str. 40, 21680 Stade
Fachbereich Physik, Universität Bremen, 283344 Bremen

Kurzfassung
Das Thema Urknall interessiert Schüler. Schließlich wollen sie möglichst genau wissen, wie ihre Welt entstand. Zugleich ist unser Wissen über diese Entstehung begrenzt und wird immer eingeschränkt bleiben. Da kein Mensch die Anfänge der Welt beobachtet hat, muss den Schülern deutlich werden, mit welchen wissenschaftlichen Methoden Erkenntnisse dazu gewonnen werden. Hier präsentiere ich drei Beispiele, bei denen Schüler selbst solche Methoden anwenden und so etwas über den Urknall entdecken. Die Lerngruppen sind eine achte Klasse, ein Leistungskurs Mathematik und drei Autoren einer Facharbeit.

1. Einleitung

Der Urknall interessiert und motiviert Schüler zu recht. Sie wollen und sollen wissen, wie man etwas über die Anfänge der Welt sagen kann. Es ist schade, dass in den Rahmenrichtlinien praktisch nichts hierzu steht. Hält man das Thema für zu schwierig? Will man es dem Fernsehen überlassen, wo es oft behandelt wird, wo aber Dialog fehlt?

Hier berichte ich über drei Gelegenheiten, bei denen ich Schüler Entdeckungen zum Urknall machen ließ. Da das Thema in unseren Rahmenrichtlinien fehlt, nutzte ich geeignete Situationen in meinem Unterricht. Bei meinen Lerngruppen war das zufällig im Mathematikunterricht. Auch im Physikunterricht gibt es Möglichkeiten die Thematik zu behandeln.

Zur Vermeidung möglicher Missverständnisse muss man wissen, dass wir im Mathematikunterricht etwas anders vorgehen als im Physikunterricht: Zu Beginn wird die Situation mathematisiert. Dabei werden auch die verwendeten Einheiten vorab geklärt. Wir können dann, anders als im Physikunterricht, mit reinen Zahlen arbeiten. Erst am Schluss wird das erzielte mathematische Ergebnis in die Realität übertragen und dabei wieder mit Einheiten versehen.

In diesem Aufsatz berichte ich zunächst über die drei Beispiele und fasse zum Schluss verallgemeinerbare Erfahrungen zusammen.

2. Wann gab es den Urknall?

Im Mathematikunterricht einer achten Klasse des Gymnasiums sollte die lineare Funktion eingeführt werden. Als Einstiegsbeispiel wählte ich die Fluchtbewegung der Galaxien. Denn ich erwartete, dass die Schüler sich die Frage nach der Bestimmung des Zeitpunkts des Urknalls zu eigen machen würden. Als Lernvoraussetzung konnten die Schüler Wertetabellen aufstellen, Graphen zeichnen und wussten, dass die am Nachthimmel sichtbaren Sterne leuchtende Objekte im Weltraum sind.

Zur Problemstellung erhielten die Schüler ein Arbeitsblatt mit der Leitfrage *Wann gab es den Urknall?,* der Vereinbarung über Einheiten: *Zeiteinheit 1 Milliarde Jahre, Längeneinheit 10 Millionen Lichtjahre, Geschwindigkeitseinheit 10 Millionen Lichtjahre pro Milliarde Jahre,* sowie folgenden Angaben über drei Galaxienhaufen.

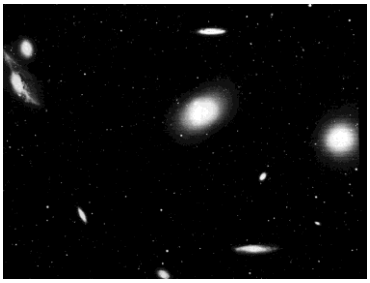
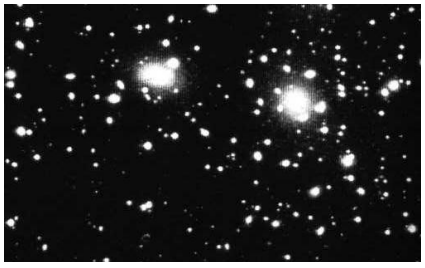


Abb. 1. Virgo-Galaxienhaufen: Entfernung 6, Geschwindigkeit 0,4 von uns weg gerichtet.

Perseus–Galaxienhaufen: Entfernung 21, Geschwindigkeit 1,4 von uns weg gerichtet.



Coma–Galaxienhaufen: Entfernung 27, Geschwindigkeit 1,8 von uns weg.

Das Arbeitsblatt endete mit der Frage: *Zu welcher Zeit x waren die Entfernungen y null?*

Zunächst wurden die Angaben auf dem Blatt mit Hilfe von Beispielen geklärt. An dieser Stelle war die Begeisterung der Schüler groß: Sie wollten die Antwort herausfinden und trauten sich das auch zu. Sie schlugen selbstständig eine tabellarische Lösung vor und erstellten diese unverzüglich:

x	0	-1	-2	-3	...	-14	-15
y	6	5,6	5,2	4,8	...	0,4	0
	21	19,6	18,2	16,8	...	1,4	0
	27	25,2	23,4	21,6	...	1,8	0

Sie erkannten, dass vor 15 Milliarden Jahren alle Galaxien hier waren. Ich erläuterte, dass von diesem zusammengepressten Zustand aus alles auseinandergeflogen sei. Das nenne man Urknall.

Einige Schüler betonten, dass schon vor dem Urknall etwas gewesen sein könnte. Auch wurde eingewandt, dass sich die Geschwindigkeiten der Galaxienhaufen geändert haben könnten. Ferner wurde gefragt, wie denn beim Urknall alles so eng beieinander gewesen sein könnte. Das zeigt mir, dass die Schüler die hier eingesetzte Methode und eine wesentliche Begrenzung der erzielten Erkenntnis gut erfasst haben. Auch in mathematischer Hinsicht haben sie das zentrale Lernziel erreicht: Sie haben anhand der Problemstellung einen linearen Zusammenhang angenommen und zur Lösung des Problems mit Hilfe einer Wertetabelle richtig umgesetzt. Weiter haben einige erkannt, dass dieser lineare Zusammenhang, die konstante Geschwindigkeit, hier möglicherweise nicht immer zutreffend war.

Später wurden für dieses Beispiel graphische und rechnerische Lösungen entwickelt:

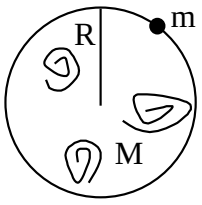


Abb. 2. Expandierender kosmischer Ball: In einer kleinen Kugel des Weltraums ist die Raumkrümmung so gering, dass die newtonsche Mechanik gilt. Die Kugel ist so groß, dass eine typische Dichte der Galaxien vorliegt. M: Masse der Kugel, R: Kugelradius, m Probemasse am Rand der Kugel.

3. Wie expandiert die Welt?

Für eine umfassende Behandlung des Urknalls verwendet man die allgemeine Relativitätstheorie. Hierfür wiederum ist die Analyse gekrümmter Räume nötig [1-3]. Allerdings kann man wesentliche Erkenntnisse bereits im Rahmen der newtonschen Mechanik gewinnen [4]: Selbst ein gekrümmter Raum erscheint in einem relativ kleinen Raumgebiet praktisch flach. Daher betrachtet man eine „typische" Kugel des Raumes, in welcher der Weltraum kaum gekrümmt ist und in der zugleich eine typische Anzahl von Galaxien ist. Wir nennen eine solche Kugel *kosmischer Ball*, s.Abb 2. In einem solchen Ball gilt die newtonsche Mechanik als Grenzfall der allgemeinen Relativitätstheorie.

Eine Probemasse m am Rand eines kosmischen Balls mit einer Masse M und einem Radius R hat folgende Energie: $E=\frac{1}{2}m\dot{R}^2-\frac{mMG}{R}$

Dabei ist $\frac{1}{2}m\dot{R}^2$ die kinetische und $-\frac{mMG}{R}$ die potentielle Energie. Dieses Systems lässt sich auf zwei Arten verstehen, durch ein äquivalentes System oder durch Lösung der Differentialgleichung:

1. Äquivalentes System

Die gleiche potentielle Energie hat ein Stein der Masse m, der von einem Planeten der Masse M senkrecht nach oben geworfen wird:

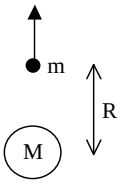


Abb. 3. Äquivalentes System: Ein Stein einer Masse m wird senkrecht von einem Planeten mit einer Masse M nach oben geworfen und hat zum Planetenmittelpunkt den Abstand R. Seine Energie hat die gleiche Form wie die des kosmischen Balls. Daher entspricht der Abstand R des Steins dem Radius R des kosmischen Balls.

Für den Stein gibt es drei Möglichkeiten:

(E<0) Bei negativer Energie steigt der Stein bis zu einer maximalen Höhe und stürzt dann zurück.

(E>0) Bei positiver Energie hat der Stein eine Geschwindigkeit über der Fluchtgeschwindigkeit und steigt unbegrenzt weiter.

(E=0) Hier hat der Stein die Fluchtgeschwindigkeit.

2. Lösung der Differentialgleichung

Wir lösen die Gleichung für E nach der Geschwindigkeit auf, um eine Differentialgleichung für R zu erhalten: $\dot{R}=\pm\sqrt{\frac{2E}{m}+2MG\frac{1}{R}}$

Wir betrachten wieder die drei Fälle:

Für E=0 ist: $\dot{R}=\sqrt{2MG}\cdot R^{-\frac{1}{2}}$

Trennung der Variablen ergibt:

$$\int R^{\frac{1}{2}} dR = \frac{2}{3} R^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2MG} \cdot t$$

Auflösen führt zu: $R = \sqrt[3]{4{,}5MG} \cdot t^{\frac{2}{3}}$

Weitere Lösungen bestimmen wir mit dem Eulerschen Polygonzug. Dazu schreiben wir für die obige Differentialgleichung näherungsweise:

$$\frac{\Delta R}{\Delta t} = \sqrt{\frac{2E}{m} + 2MG\frac{1}{R}}$$

Daher gilt die Differenzengleichung:

$$R(t + \Delta t) = R(t) + \sqrt{\frac{2E}{m} + 2MG\frac{1}{R(t)}} \cdot \Delta t$$

Diese wird mit einem Taschencomputer iterativ gelöst, s. Abb. 4.

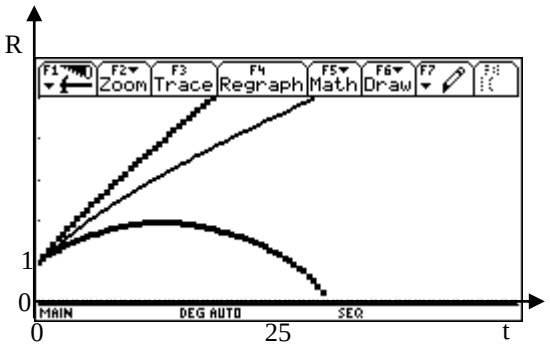


Abb. 4. Iterative näherungsweise Lösung der Differentialgleichung: Einheiten wie oben: t in 10^9a. R in 10^7 Lichtjahre. Startwert R(0) = 1. Dichte: 10^{-27} kg pro m^3. Unterer Graph: E=-0,5mMG. Mittlerer Graph: E=0. Oberer Graph: E=0,5mMG.

Bei allen drei Lösungen ist die Expansion gebremst. Bei negativer Energie kehrt sich die anfängliche Ausdehnung in eine Kontraktion um, während anderenfalls der kosmische Ball andauernd größer wird.

In meinem Leistungskurs Mathematik hatten wir zur Analysis das Thema Differentialgleichungen erweiternd behandelt. Als eine Anwendung gab ich den Schülern die obige Differentialgleichung mit Erläuterungen. Die Schüler führten die dargestellte zweite Untersuchung der Differentialgleichung ohne besondere Schwierigkeiten durch. Ferner entschieden sich drei Schüler, über Differentialgleichungen zur 1998 entdeckten beschleunigten Expansion des Weltalls ihre Facharbeit zu schreiben.

4. Antigravitation und beschleunigte Expansion

Bis 1998 ging man davon aus, dass die Expansion des Alls durch die Anziehung der Massen mit der Zeit langsamer wird. Dann entdeckte man bei entfernten Supernovae, dass die Ausdehnung beschleunigt ist [5]. Einen Beschleunigungsterm führte bereits Einstein in seine Bewegungsgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie ein, die sogenannte kosmologische Konstante. Er wollte so ein Universum beschreiben, das sich weder ausdehnt noch zusammenzieht, ein statisches Universum. Ein Beschleunigungsterm beruht auf einer abstoßenden Kraftwirkung. Eine solche Abstoßung erhält man, wenn man annimmt, dass das Vakuum eine Masse M_V hat. Dann kommt zur obigen Energie einer Probemasse eines kosmischen Balls ein entsprechender Term für M_V hinzu:

$$E = \frac{1}{2} m\dot{R}^2 - \frac{mMG}{R} - \frac{mM_V G}{R}$$

Nun soll diese Energie als Funktion von R dargestellt werden. Dabei ist zu beachten, dass die Masse M des kosmischen Balls bei der Ausdehnung konstant bleibt. Auch bleibt die Dichte ρ_V des Vakuums konstant, denn diese sollte eine feste Vakuumeigenschaft darstellen. Daher gilt für die Masse des Vakuums des kosmischen Balls:

$$M_V = \rho_V \cdot 4\pi R^3/3$$

Dies setzen wir in die Gleichung für die Energie ein:

$$E = \frac{1}{2} m\dot{R}^2 - \frac{mMG}{R} - \frac{4\pi}{3} mG\rho_V R^2$$

Nun soll untersucht werden, unter welchen Bedingungen ein statisches Universum auftritt, d. h. R konstant ist. Hierzu muss $\dot{R} = 0$ sein, ebenso die Kraft $F = -E' = 0$:

$$F = -\frac{mMG}{R^2} + \frac{8\pi}{3} mG\rho_V R = 0$$

Diese Kraft setzt sich aus zwei Teilen zusammen: Der Term proportional zu M stellt die Anziehung der Massen dar. Der Term mit ρ_V beschreibt wegen des umgekehrten Vorzeichens eine Abstoßung. Also führt eine Masse des Vakuums zu einer effektiven abstoßenden gravitativen Wirkung, diese wird manchmal auch Antigravitation genannt.

Nun prüfen wir noch, ob diese stationäre Lösung der Differentialgleichung ein stabiles oder ein labiles Kräftegleichgewicht darstellt. Dazu stellen wir die Energie $E = -\frac{mMG}{R} - \frac{4\pi}{3} mG\rho_V R^2$ als Funktion des Radius R des kosmischen Balls dar, s. Abb 5. Das statische Universum entspricht einem lokalen Maximum der Energie und daher einem labilen Kräftegleichgewicht. Somit ist es unplausibel. Für Radien rechts vom Maximum, also für Dichten unterhalb der des statischen Universums, herrscht eine abstoßende Kraftwirkung. Die Expansion ist dann beschleunigt, wie beobachtet [5]. Bei sehr hohen Dichten, links vom lokalen Maximum in der Abbildung 5, wäre die Kraftwirkung anziehend und die Ausdehnung gebremst, wie vor 1998 meist angenommen.

Drei Schüler meines Leistungskurses Mathematik untersuchten die Differentialgleichungen zur Ausdehnung des Alls mit massivem Vakuum in ihrer Facharbeit. Dabei erörterten sie anhand ihrer Ergebnisse das von Einstein vorgeschlagene statische Universum sowie die neu entdeckte beschleunigte Expansion. Anschließend präsentierten sie ihre Arbeit dem

gesamten Kurs und es entwickelte sich eine lebhafte Diskussion.

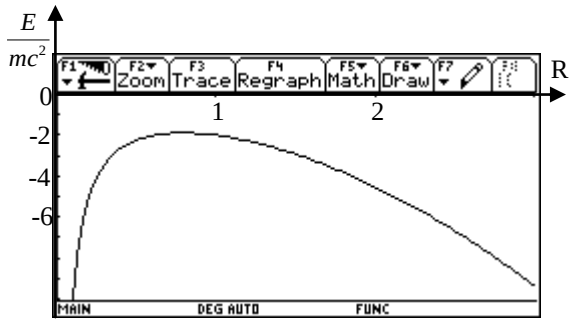


Abb. 5. $\frac{E}{mc^2}$ für eine Probemasse eines kosmischen Balls mit massivem Vakuum: R in 10^7 Lichtjahre (LJ) mit $\frac{MG}{c^2}=10^7$ LJ und $\frac{4\pi}{3c^2}G\rho_V=(10^7 \text{ LJ})^{-2}$. Lokales Maximum: Statisches Universum im labilen Kräftegleichgewicht. Rechts: Abstoßung mit beschleunigter Expansion. Links: Anziehung mit gebremster Ausdehnung oder beschleunigter Kontraktion.

5. Zusammenfassung

In drei Lerngruppen des Gymnasiums der Klassenstufen 8 und 12 haben Schüler Eigenschaften des Urknalls entdeckt. Immer waren die Schüler sehr interessiert und konnten nach einer Problemstellung selbstständig Erkenntnisse gewinnen. Den Schülern war dabei immer klar, dass auch die besten Experten nur recht unvollständige Kenntnisse haben können. Daher achteten sie genau auf die Methoden, mit denen Ergebnisse erzielt wurden. Auch bewiesen sie ihre gewonnene Methodenkenntnis durch sachgerechte kritische Fragen. Insgesamt hat sich gezeigt, dass ausgewählte wesentliche und hoch aktuelle Fragen zum Urknall von Schülern des Gymnasiums selbstständig bearbeitet werden können. Eine Unterrichtseinheit zu dem Thema, wie ich sie beispielsweise in einer Astronomie AG durchführte, wäre auch im normalen Unterricht möglich.

6. Literatur

[1] A. Unsöld und B. Baschek: Der neue Kosmos. 6. Auflage, Springer, Berlin – Heidelberg – New York 1999.
[2] H.-O. Carmesin: Grundideen der Relativitätstheorie. Köster, Berlin 1996.
[3] H. Stephani: Allgemeine Relativitätstheorie. VEB Verlag der Wissenschaften, Berlin 1980.
[4] E. R. Harrison: Kosmologie. 3. Auflage, Verlag Darmstädter Blätter, Darmstadt 1990.
[5] D. Giulini und N. Straumann: Das Rätsel der kosmischen Vakuumenergiedichte und die beschleunigte Expansion des Universums. Physikalisch Blätter 56, Heft 11, S. 41-48 (2000).

Veröffentlicht:
H.-O. Carmesin, Urknallmechanik im Unterricht. In: Tagungs-CD Fachdidaktik Physik, Deutsche Physikalische Gesellschaft, 2002, Deutsche Physikalische Gesellschaft.