Stefan-Boltzmann-Gesetz und Stefan-Boltzmann-Konstante

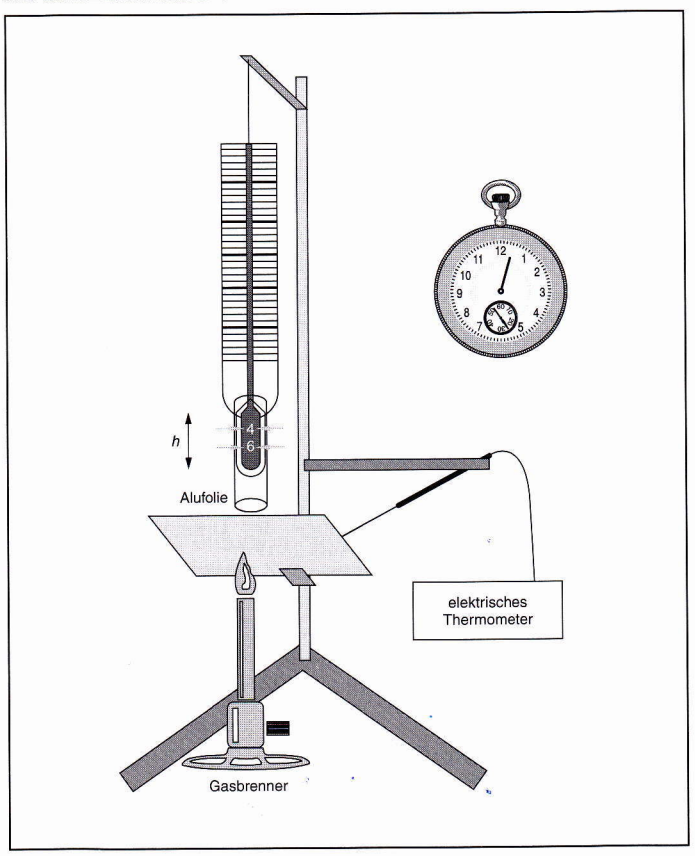
– Entdeckungen mit einem Flüssigkeitsthermometer in Klasse 11

H.-O. Carmesin

1 Einleitung

Ein glühender Körper leuchtet sichtbar. Allgemeiner gibt jeder Körper alleine aufgrund seiner Temperatur immer elektromagnetische Strahlung ab. Deren Leistung geteilt durch den Oberflächeinhalt des Körpers heißt Leistungsdichte S und hängt von der Temperatur des Gegenstandes ab. Das *Stefan-Boltzmann*-Gesetz besagt dazu, *dass die Leistungsdichte S eines schwarzen Körpers proportional zur vierten Potenz seiner absoluten Temperatur T ist.* Der Quotient S pro T^4 heißt *Stefan-Boltzmann-Konstante* σ und ist die universelle Naturkonstante $\sigma = 5{,}6705 \cdot 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4} (siehe [1], S. 580).

Abb. 1: Versuchsskizze: Das Flüssigkeitsthermometer ist unten mit einer zylindrisch gewickelten Alufolie umschlossen um seitliche Abstrahlung zu unterbinden. Wegen der Hitzebeständigkeit wird nur unbeschichtetes Stativmaterial verwendet. Als Gasbrenner haben sich sowohl Campinggaskocher als auch Bunsenbrenner bewährt. Das Flüssigkeitsthermometer hängt genau über dem Gasbrenner wenige cm über dem Eisenblech. Der Fühler des elektrischen Thermometers berührt das Eisenblech in der Nähe des Flüssigkeitsthermometers aber nicht senkrecht unter dem Zylinder aus Alufolie. Der Alkohol des Flüssigkeitsthermometers befindet sich hauptsächlich in einem Zylinder der Höhe *h*. Die Messung des Innendurchmessers des Zylinders ergab 4 mm, die des Außendurchmessers 6 mm. Die Alufolie ist darum gewickelt und bildet daher einen Zylinder mit dem Durchmesser 6 mm.



T in K	$\Delta T/\Delta t$ in K/s
0	0
370	0,039
402	0,069
500	0,273
615	0,706
690	1,37
750	1,875
751	1,86
757	1,754
796	2,192

Tab. 1: Ergebnisse einer Messreihe: Linke Spalte: Temperatur des Blechs. Rechte Spalte: Temperaturzunahme pro Zeit. $\Delta T/\Delta t$ sollte bei 751 K kleiner als bei 757 K sein. Die umgekehrte Beobachtung wird als statistischer Fehler gedeutet. Denn beim Experimentieren fällt auf, dass bei diesen hohen Temperaturen die Temperatur des Blechs während einer Messung um einige K schwankt. Bei 0 K ist die Energie 0, daher wird keine Energie abgestrahlt und $\Delta T/\Delta t = 0$.

Das *Stefan-Boltzmann*-Gesetz ist grundlegend zur Behandlung von Klimamodellen (s. [2], S. 156, 166; [3]) sowie für den Treibhauseffekt. Diesen vergrößert die Menschheit durch Verbrennung und den damit verbundenen Ausstoß von Kohlenstoffdioxid. Zu dessen Verringerung gibt es inzwischen weltweite Vereinbarungen. Dieses aktuelle Thema Treibhauseffekt ist entsprechend auch in den Rahmenrichtlinien vorgesehen [4]. Wie soll man das hierfür wichtige *Stefan- Boltzmann*-Gesetz einführen? Eine theoretische Herleitung würde Kenntnisse der Quantenstatistik erfordern und kommt daher in der Schule nicht in Frage. Für eine experimentelle Einführung gibt es in Schulbüchern kaum Anregungen [2, 5]. Die Hersteller von Lehrmitteln schlagen allenfalls den Strahlungswürfel nach *Leslie* als Experimentiermaterial vor [6, 7]. Hierbei wird Wasser erhitzt. Daher kann die Leistungsdichte bestenfalls für das Temperaturintervall [273 K; 373 K] gemessen werden. Dieses Intervall liegt so ungünstig, dass sich bei den üblichen statistischen Fehlern kaum entscheiden lässt, ob der Exponent 3, 4 oder 5 ist.

Dieses Problem des ungünstigen Intervalls haben wir im Unterricht wie folgt vermieden: Wir haben eine Metallplatte mit einem Bunsenbrenner erhitzt, s. Abb. 1. Die von der Platte abgestrahlte Leistungsdichte S haben wir mit einem Flüssigkeitsthermometer und einer Stoppuhr gemessen. So haben wir das Temperaturintervall $T \in$ [370 K;

796 K] verwendet. Dieses ist über viermal so groß wie das beim Strahlungswürfel nach *Leslie* nutzbare Intervall. Wir konnten so den Exponenten 4 sicher von den Exponenten 3 und 5 unterscheiden, s. Abb. 2 bis Abb. 6. Ferner konnten wir die *Stefan-Boltzmann*-Konstante bestimmen.

2 Versuchsaufbau

Die Versuchsskizze ist in Abb. 1 dargestellt. Es ist günstig ein Flüssigkeitsthermometer mit relativ großem Durchmesser zu verwenden. Wir haben ein Thermometer benutzt, das unten einen Durchmesser von 6 mm hat, s. Abb. 1.

3 Durchführung

Das Flüssigkeitsthermometer wird mit der Hand über der Stativstange gehalten, damit es abkühlen kann. Nur für die Dauer einer Messung wird es über das Blech gehängt. Das Eisenblech wird von unten mit dem Gasbrenner geheizt.

- Eine Messung wird wie folgt durchgeführt: Das Flüssigkeitsthermometer wird über die Eisenplatte gehängt bis seine Temperaturanzeige um einen Temperaturunterschied ΔT angestiegen ist. Die dabei verstrichene Zeit Δt wird mit der Stoppuhr gemessen. Auch wird die Temperatur T des Blechs am elektrischen Thermometer abgelesen. Es ist praktisch, bei hohen Temperaturen des Blechs größere ΔT zu verwenden als bei kleineren. Der Quotient $\Delta T/\Delta t$ wird bestimmt.
- Es wird eine Messreihe bei unterschiedlichen Temperaturen des Blechs durchgeführt. Ab einer Blechtemperatur von etwa 370 K erwärmt sich das Flüssigkeitsthermometer hinreichend schnell, so dass eine Messung sinnvoll ist. Höhere Temperaturen als 796 K konnten nicht erreicht werden.

4 Versuchsergebnisse

Diesen Versuch habe ich 1998 und 2002 in einer Klasse 11 im Physikunterricht durchgeführt. Die Ergebnisse einer Messreihe sind in der Tab. 1 und in Abb. 2 dargestellt.

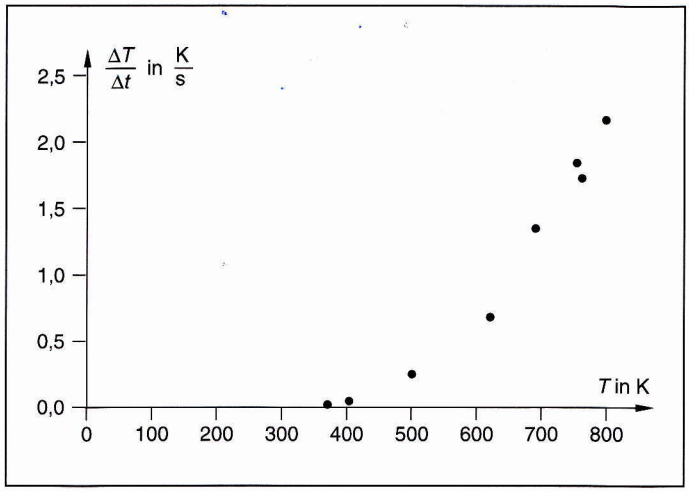
5 Auswertungen

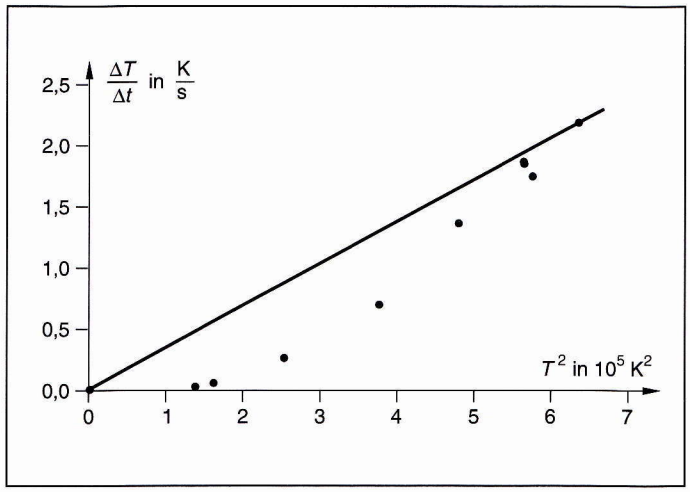
5.1 Zusammenhang zwischen S und $\Delta T/\Delta t$

Die Leistungsdichte S des Blechs ist die Energiezunahme ΔE des Alkohols im Flüssigkeitsthermometer pro Zeit Δt und pro Fläche $A = \pi\ (3\ \text{mm})^2$ des Zylinders der Alufolie, s. Abb. 1.

$$S = \frac{\Delta E}{\Delta t\ \pi\ 9\ \text{mm}^2}$$

Die Energiezunahme ΔE ist gleich der Temperaturzunahme ΔT mal der Masse m des Alkohols und der spezifischen Wärmekapazität c des Alkohols.





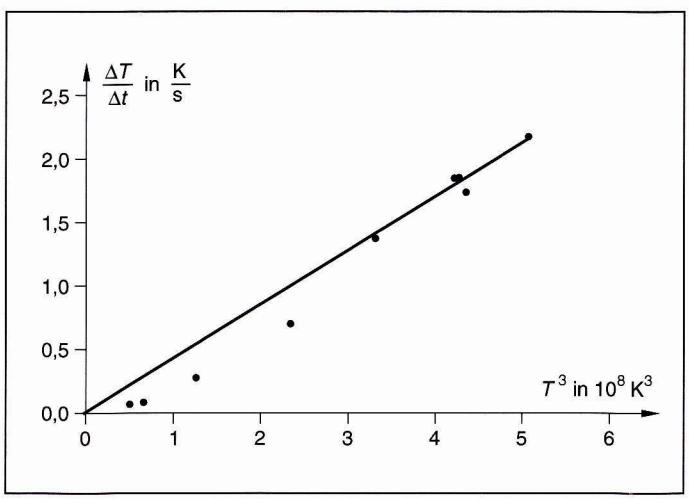


Abb. 2 (oben): Ergebnisse einer Messreihe: Horizontale Achse: Temperatur des Blechs in K. Vertikale Achse: Temperaturzunahme des Flüssigkeitsthermometers ΔT pro Zeit Δt in K/s. Die Datenpunkte entsprechen der Tabelle. Die Temperaturzunahme ist proportional zur Energiezunahme. Daher ist $\Delta T/\Delta t$ proportional zur Leistungsdichte S, siehe Auswertung im Text. Man erkennt, dass die Leistungsdichte S schneller als linear mit der Temperatur T des Blechs zunimmt.

Abb. 3 (Mitte): Vermutung Exponent 2: Horizontale Achse: Temperatur hoch 2 des Blechs in K hoch 2. Vertikale Achse: Temperaturzunahme des Flüssigkeitsthermometers ΔT pro Zeit Δt in K/s. Gerade: Zum Vergleich. Die Datenpunkte liegen auf einer Kurve mit Linkskrümmung. Daher ist der Exponent 2 zu klein.

Abb. 4 (unten): Vermutung Exponent 3: Horizontale Achse: Temperatur hoch 3 des Blechs in K hoch 3. Vertikale Achse: Temperaturzunahme des Flüssigkeitsthermometers ΔT pro Zeit Δt in K/s. Gerade: Zum Vergleich. Die Datenpunkte liegen auf einer Kurve mit Linkskrümmung. Daher ist der Exponent 3 zu klein.

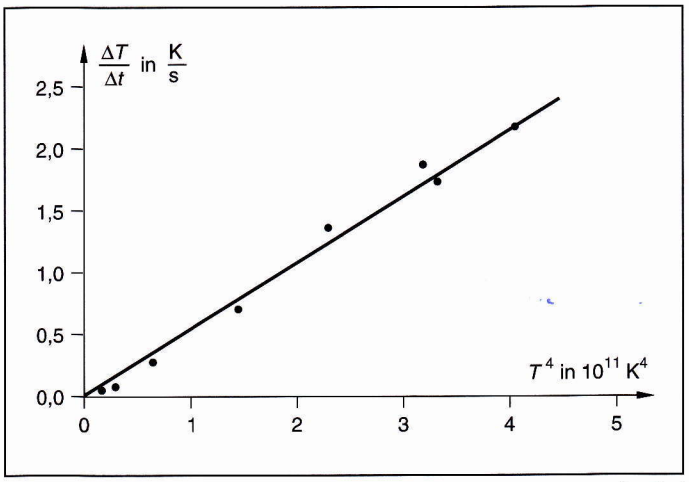


Abb. 5: Vermutung Exponent 4: Horizontale Achse: Temperatur hoch 4 des Blechs in K hoch 4. Vertikale Achse: Temperaturzunahme des Flüssigkeitsthermometers ΔT pro Zeit Δt in K/s. Gerade: Zum Vergleich. Die Datenpunkte liegen deutlich besser auf der Geraden als bei den Abb. 4 und 6. Also ist der Exponent 4 zutreffend.

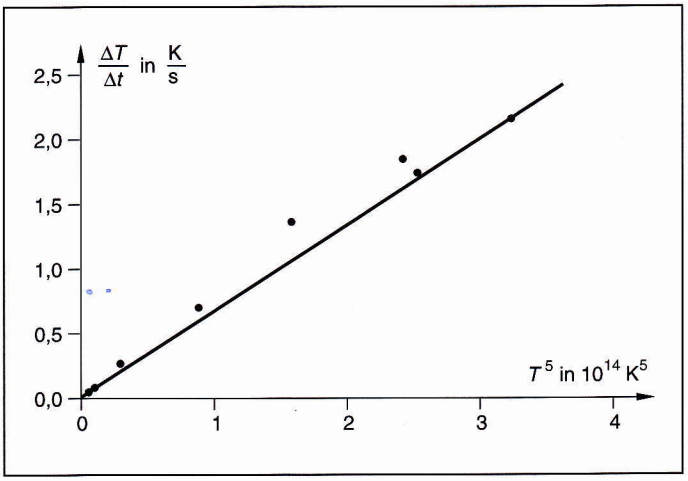


Abb. 6: Vermutung Exponent 5: Horizontale Achse: Temperatur hoch 5 des Blechs in K hoch 5. Vertikale Achse: Temperaturzunahme des Flüssigkeitsthermometers ΔT pro Zeit Δt in K/s. Gerade: Zum Vergleich. Die Datenpunkte liegen auf einer Kurve mit Rechtskrümmung. Daher ist der Exponent 5 zu groß.

$$S = \frac{\Delta T\, c\, m}{\Delta t\, \pi\, 9\,\mathrm{mm}^2}$$

Die Masse m des Alkohols ist gleich seiner Dichte ρ mal seinem Volumen V.

$$S = \frac{\Delta T\, c\, \rho\, V}{\Delta t\, \pi\, 9\,\mathrm{mm}^2}$$

Der Alkohol befindet sich in einem nahezu zylinderförmigen Volumen, s. Abb. 1. Der Zylinder hat die Höhe h = 1,2 cm und den Radius 2 mm, s. Abb. 1. Der Radius ist hier 1 mm kleiner als der des Aluzylinders, weil die Dicke der Glaswand des Thermometers im unteren Bereich 1 mm beträgt, s. Abb. 1.

$$S = \frac{\Delta T\, c\, \rho\, h\, \pi\, 4\,\mathrm{mm}^2}{\Delta t\, \pi\, 9\,\mathrm{mm}^2} = \frac{\Delta T}{\Delta t} c\, \rho\, h \frac{4}{9} \qquad (1)$$

S ist proportional zu $\Delta T/\Delta t$.

5.2 Bestimmung des Exponenten

An Abb. 2 ist erkennbar, dass $\Delta T/\Delta t$ nicht proportional zu T ist. Der Graph sieht aus wie eine Parabel durch den Ursprung. Daher werden folgende Zusammenhänge vermutet: $\Delta T/\Delta t \propto T^2$, $\Delta T/\Delta t \propto T^3$, $\Delta T/\Delta t \propto T^4$ und $\Delta T/\Delta t \propto T^5$. Diese vermuteten Proportionalitäten werden mit Hilfe von Graphen untersucht, so dass bei der richtigen Vermutung die Datenpunkte auf einer Gerade liegen sollten, s. Abb. 3 bis 6. Die Abbildungen zeigen, dass der Exponent 4 ist. Da $\Delta T/\Delta t \propto S$ ist, s. Gleichung 1, ist auch S proportional T^4. Das ist das *Stefan-Boltzmann*-Gesetz.

5.3 Bestimmung der *Stefan-Boltzmann*-Konstante

Mit dem vorhandenen Experiment lässt sich die *Stefan-Boltzmann*-Konstante σ bestimmen. Wir gehen von der Definition für σ aus: $\sigma = S / T^4$. Hier wird für S der Term aus Gl. 1 eingesetzt:

$$\sigma = \frac{\frac{\Delta T}{\Delta t}}{T^4} c\, \rho\, h \frac{4}{9} \qquad (2)$$

Der Doppelbruch ist durch die Steigung der Ursprungsgeraden in Abb. 5 bestimmt:

$$\frac{\frac{\Delta T}{\Delta t}}{T^4} = \frac{2{,}192\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}}}{4{,}015 \cdot 10^{11}\,\mathrm{K}^4} = 5{,}46 \cdot 10^{-12}\,\frac{1}{\mathrm{s\,K}^3}$$

Die Höhe h wird gemessen und beträgt h = 1,2 cm. Alkohol hat die spezifische Wärmekapazität c = 2,4 J/(g K) und die Dichte ρ = 0,79 g/cm³. Einsetzen in Gleichung 2 ergibt

$$\sigma = 5{,}52 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}^4}$$

Der Literaturwert ist

$$\sigma = 5{,}6705 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}^4}$$

Die Abweichung von unter 3% ist bei der elementaren verwendeten Anordnung vermutlich ein Glücksfall. Denn bei der Auswertung wurden folgende Erscheinungen vernachlässigt:

- Aufnahme von Energie durch Erwärmen der Glaswand des Thermometers
- Transport von Wärme durch Wärmeleitung und Konvektion
- Abweichung des Alkoholvolumens von der Zylinderform
- Abweichung der gewickelten Alufolie von der Zylinderform

Besonders große statistische Fehler sind bei folgenden Messgrößen zu erwarten:

- Innendurchmesser von 4 mm
- Außendurchmesser von 6 mm

Selbst wenn im Unterricht die Bestimmung der *Stefan-Boltzmann*-Konstante σ ein grob ungenaues Ergebnis lie-

fert, so kann dies im Sinne einer Antwort auf eine *Fermi*-Frage sinnvoll sein. Dabei ist eine Frage nach einer groben Bestimmung einer Größe als *Fermi*-Frage bekannt. Im Unterricht sind solche Fragen zur Schulung des Größenverständnisses und selbstständiger konstruktiver Arbeitsweisen hilfreich [8].

6 Lehrverfahren

Diesen Versuch haben meine Schülerinnen und Schüler in einer 11. Klasse 1998 und 2002 im Physikunterricht des Gymnasiums durchgeführt. Mit den Schülern wurde zunächst das Ziel vereinbart, die Abhängigkeit der Leistungsdichte S von der absoluten Temperatur T experimentell zu untersuchen. Auch wurde ihnen das Material für den Versuch präsentiert. Daraufhin konnten sie mit geringen Lernhilfen das Experiment selbstständig planen, durchführen und auswerten. So entdeckten sie innerhalb von zwei Unterrichtsstunden das *Stefan-Boltzmann*-Gesetz. In einer dritten Stunde bestimmten sie die *Stefan-Boltzmann*-Konstante.

7 Zusammenfassung

Das *Stefan-Boltzmann*-Gesetz besagt, dass die Leistungsdichte der Temperaturstrahlung eines schwarzen Körpers proportional zur vierten Potenz seiner absoluten Temperatur ist. Hier wird dieses Resultat mit Hilfe eines üblichen Flüssigkeitsthermometers erzielt. Die Anordnung ist so elementar, dass Schülerinnen und Schüler das Experiment im Unterricht weitgehend selbstständig planen und durchführen konnten. Dabei nutzten wir ein Temperaturintervall, das mehr als viermal so groß ist wie das des sonst hier üblichen Strahlungswürfels nach *Leslie*. So gelang es uns auch im Unterricht die *Stefan-Boltzmann*-Konstante zu bestimmen.

Literatur

[1] *Unsöld, A.* u. *Baschek, B.*: Der neue Kosmos, 6. Auflage, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1999, S. 580.
[2] *Boysen, G.* et al.: Physik (Oberstufe, Ausgabe A Band 1), Cornelsen, 1997, S. 152, S. 166.
[3] *Carmesin, H.-O.*: Einführung des Treibhauseffekts durch einen anschaulichen Prozess. In: Tagungs-CD, Fachdidaktik Physik, Deutsche Physikalische Gesellschaft, 2001, Deutsche Physikalische Gesellschaft.
[4] *Ahlswede, R.* u. a.: Rahmenrichtlinien für das Gymnasium - gymnasiale Oberstufe, die Gesamtschule - gymnasiale Oberstufe, das Fachgymnasium, Abendgymnasium, das Kolleg, Physik, Niedersächsisches Kultusministerium, Schroedel, Hannover 1997.
[5] *Grehn, J.* u. a.: Metzler Physik, 2. durchgesehene Auflage, Schroedel, Hannover 1992.
und II. Cornelsen, Berlin 2001, S. 103.
[6] Phywe Physik, Hauptkatalog 3.21, Göttingen 2002, S. 171-222.
[7] Produktkatalog Physik, Leybold Didactic GmbH, Hürth 2002, S. 102.
[8] *Leuders, T.*: Qualität im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I

Anschrift des Verfassers:
Hans-Otto Carmesin, Gymnasium Athenaeum, Harsefelder Str. 40, 21680 Stade, und Fachbereich Physik, Universität Bremen, 28334 Bremen

Verschiebungsarbeit, gravitative Feldenergie und Potenzial

E. Rückl, H. Reitzenstein u. H. Werner

1 Einleitung

Im Physikunterricht in der gymnasialen Oberstufe in den Bundesländern sowie im Fach- und Berufsoberschulbereich in Bayern ist die Behandlung des Gravitationsfeldes vorgesehen. In Bayern ist die Vermittlung der Begriffe der Verschiebungsarbeit, der potenziellen Energie und des Potenzials zwingend [2] vorgeschrieben.
Die Erarbeitung dieser Begriffe erfolgt in den einschlägigen Schulbüchern fast immer über das *Newton*'sche Kraftgesetz unter Einbeziehung der Fernwirkungsvorstellung sowie unter Anwendung des Arbeitsbegriffes. Zwar wird erwähnt, dass ein Gravitationsfeld existiert; aber die entscheidenden Hinweise auf die Energiespeicherung im Gravitationsfeld und auf die Feldstärke $g(r)$ als feldbeschreibende Größe unter Einbeziehung der Nahewirkungsvorstellung wird nur sehr selten eingegangen. *Kuhn* [3] hat jedoch schon vor 30 Jahren einen Weg aufgezeigt, wie Physik verständlicher vermittelt werden kann; aber auch er hält noch an der Fernwirkungsvorstellung implizit fest. In diese Lehrplan- und Schulbuchanalyse beziehen wir Ergebnisse Jahrzehnte langer fachdidaktischer Forschungen zu Schülervorstellungen schulphysikalischer Inhalte maßgebend ein. Diese Forschungsergebnisse weisen aus, dass die Schüler größte Schwierigkeiten haben, für sie abstrakte Begriffe wie potenzielle Energie und Potenzial zu verstehen; vgl. [4]. Es geht also darum, unnötige Abstraktionen, Wi-