Didaktik der Physik
Frühjahrstagung Düsseldorf 2004

Sternmodelle

Hans – Otto Carmesin

Hohenwedeler Weg 136, 21682 Stade
Gymnasium Athenaeum, Harsefelder Straße 136, 21680 Stade
Fachbereich Physik, Universität Bremen, 28334 Bremen

Kurzfassung
In der Arbeitsgemeinschaft für Astronomie haben Schülerinnen und Schüler mit Hilfe eigener Beobachtungen die Hauptreihe entdeckt. Sie fragten sich, warum diese Hauptreihe die beobachtete Form und Lage hat. Wir nahmen diese Frage zum Ausgangspunkt für die Entwicklung eines tieferen physikalischen Verständnisses des dynamischen Gleichgewichts, das sich durch das Zusammenwirken von Kernfusion, Schwerkraft, Druck, Dichte und Temperatur einstellt. So lösten die Schülerinnen und Schüler weitgehend selbstständig drei sukzessive umfassendere Sternmodelle und leiteten dabei auch eine Gleichung für die Lage der Hauptreihe im Temperatur – Leuchtkraft – Diagramm her.

1. Einleitung

In der Arbeitsgemeinschaft für Astronomie haben die Schülerinnen und Schüler von unserer Sternwarte aus für verschiedene Sterne die Temperaturen und die Leuchtkräfte bestimmt. Die Ergebnisse haben sie in ein Temperatur – Leuchtkraft - Diagramm eingetragen. So haben sie die Hauptreihe, die Roten Riesen und die Überriesen entdeckt. Dann stellten die Schülerinnen und Schüler die Frage, warum es genau solche Sterne gibt. Die Entstehung der roten Riesen wurde in der üblichen Weise für die Schülerinnen und Schüler befriedigend erklärt [1,2]. Ungeklärt war jedoch die Existenz, Form und Lage der Hauptreihe. Wir fassten dies als eine willkommene Gelegenheit auf mehr über die physikalischen Prozesse zu lernen, die auf Sternen während des Wasserstoffbrennens ablaufen. Unser Ziel war es somit, dass wir unseren physikalischen Erkenntnisprozess dadurch vertiefen und abrunden, dass wir unsere Beobachtungen mit angemessenen Modellen theoretisch auch zahlenmäßig erklären. Als nächstes legten wir den Rahmen fest, in dem wir dieses Ziel erreichen wollten. In unserer Arbeitsgemeinschaft veranstalten wir einmal jährlich einen öffentlichen Astroabend. Also hatten wir ein Jahr Zeit, wobei wir uns alle 14 Tage für zwei Stunden trafen. Die Teilnehmer bei dem somit geplanten Kurs waren 10 Schülerinnen und Schüler aus meinem Leistungskurs Physik sowie ein Schüler des Leistungskurses Physik des Nachbargymnasiums. Im Nachhinein kann man sagen, dass es sich vermutlich gelohnt hätte vor Beginn des Kurses weitere Schülerinnen und Schüler einzuladen. Denn der Kurs wirkte auf die Teilnehmerinnen und Teilnehmer sehr motivierend und hätte vermutlich auch einige Schülerinnen und Schüler unserer beiden Mathematikleistungskurse interessiert.

2. Beobachtung

Wir haben an unserer Schulsternwarte einen Celestron 8 Reflektor auf einer Gemini 40 Montierung sowie eine ST7E Astrokamera von SBIG, ein Baader-Gitter zum Spektroskopieren sowie drei Farbfilter für Farbaufnahmen. Mit dieser Ausstattung fertigten die Schülerinnen und Schüler Farbaufnahmen an, siehe Abbildung 1, und bestimmten mit Hilfe der Planck – Formel die Sterntemperaturen. Ferner bestimmten wir anhand einer zugehörigen Schwarz – Weiß – Aufnahme die scheinbaren Helligkeiten. Anschließend nahmen wir Literaturwerte für die Sterne zu Hilfe um die scheinbaren Helligkeiten in absolute Helligkeiten und Leuchtkräfte umzurechnen. Die Sterntemperaturen bestimmten wir alternativ spektroskopisch mit Hilfe der Sternklassen, siehe Abbildung 2.

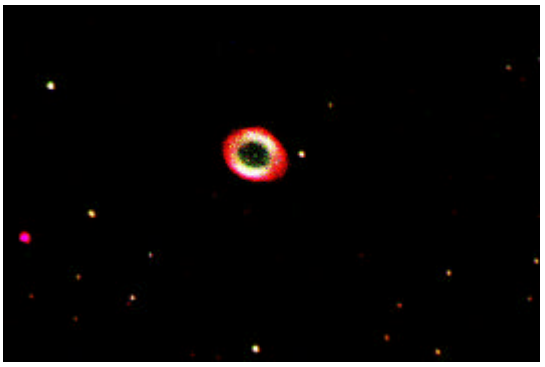


Abbildung 1: Farbaufnahme: Als Beispiel für eine Farbaufnahme, die in unserer Sternwarte erstellt wurde, zeigen wir gerne dieses Bild des Ringnebels.

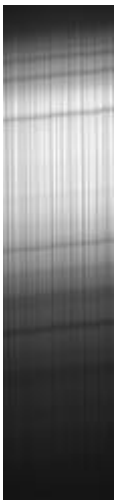


Abbildung 2: Spektrum von Wega: Die wesentlichen Spektrallinien von α - Lyrae sind deutlich zu erkennen. Beispielsweise ist im oberen Bereich die Balmer – Serie weit in das Ultraviolett hinein klar auszumachen.

Die Ergebnisse wurden in ein Temperatur – Leuchtkraft – Diagramm eingetragen, siehe Abbildung 3, dabei wurden Literaturdaten ergänzt, wo die eigenen Messungen aufgrund von Anfängerfehlern der Schülerinnen und Schüler noch unvollständig waren.

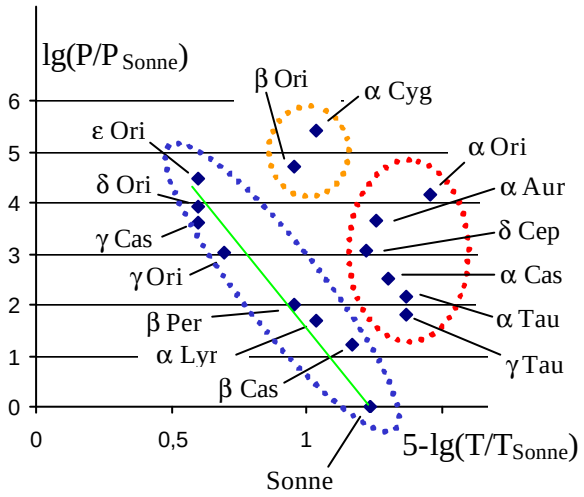


Abbildung 3: Für die untersuchten Sterne wurde die ermittelte Leuchtkraft in Einheiten der Leuchtkraft der Sonne abhängig von der Temperatur in Einheiten der Temperatur der Sonne doppelt logarithmisch aufgetragen. Dabei wurde auf der waagerechten Achse $5 - \lg(T/T_{Sonne})$ eingetragen um zu einer üblichen Darstellung zu gelangen. Hier entdeckten die Schülerinnen und Schüler leicht die Roten Riesen (rot umrandet), Überriesen (orange umrandet) und die Hauptreihe (blau umrandet) und stellten zu Recht die Frage, **warum** die Sterne nicht bei beliebigen Kombinationen von Temperatur und Leuchtkraft vorkommen. Nachdem die Schülerinnen und Schüler 3 Sternmodelle entwickelt und untersucht hatten, konnten sie für die Hauptreihe die grüne Gerade aus grundlegenden physikalischen Fakten herleiten.

3. Sternmodell 1

Die Schülerinnen und Schüler wollten die Form und Lage der Hauptreihe möglichst selbstständig erklären. Daher begannen wir mit einem besonders einfachen Sternmodell, das später verfeinert werden konnte: Wir fragten: Welche Kugel bildet das Gas aufgrund der eigenen Schwerkraft bei konstanter Dichte?

In einem ersten Arbeitsblatt bildeten einige bekannte Tatsachen über die Sonne den Ausgangspunkt: Der Sonnenradius beträgt R = 700000 km. Die Sonnenmasse ist $M = 2 \cdot 10^{30}$ kg. Durch die Kernfusion beträgt die freigesetzte Leistung pro Masse [3]: $\varepsilon = \rho \cdot 0{,}2583 \cdot T_6^{-2/3} \cdot \exp(-33{,}722 \cdot T_6^{-1/3})$ $m^3 \cdot W \cdot kg^{-2}$. Dabei ist T_6 die Temperatur in Einheiten von 10^6 K.

Die mittlere Teilchenmasse ist $\mu = 1{,}04 \cdot 10^{-27}$ kg [4]. Auf diesem ersten Arbeitsblatt waren folgende Größen unter der Annahme konstanter Dichte zu bestimmen: Die Dichte ρ, die Änderung des Druckes p pro Änderung des Abstandes r vom Zentrum, kurz dp/dr, der Druck als Funktion von r, kurz p(r), die absolute Temperatur T als Funktion von r, kurz T(r), die Leistung P, die Photosphärentemperatur T, das heißt die effektive Temperatur.

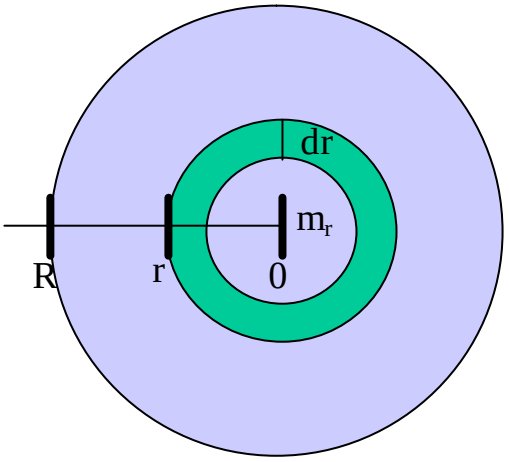


Abbildung 4: Grundlegende Struktur der drei behandelten Sternmodelle: Mit Hilfe des Sternmodells 1 lernen die Schülerinnen und Schüler den grundlegenden Aufbau der drei behandelten Sternmodelle kennen: Das Modell ist isotrop. Der Abstand eines Punktes vom Sternzentrum wird durch die Polarkoordinate r markiert. Betrachtet werden Schalen mit dem Sternzentrum in der Mitte, einem Radius r, einer Dicke dr, einer Oberfläche A, einer Masse dm und der eingeschlossenen Masse m_r.

Die Schülerinnen und Schüler lösten dieses erste Arbeitsblatt weitgehend selbstständig wie folgt:

$\rho = m/V = m/(4/3\ \pi\ R^3) = 1392\ kg/m^3$

Zur Bestimmung von dp/dr wurde eine Kugelschale in einem Abstand r und mit einer Dicke dr betrachtet, siehe Abbildung 4. Die von der Schale eingeschlossene Masse nennen wir m_r. Die Masse der Schale wird mit dm bezeichnet und die Oberfläche mit A. Diese Schale drückt gemäß dem Gravitationsgesetz mit folgender Kraft zur Mitte:

$dF=G \cdot m_r \cdot dm/r^2$

Wir setzen für $dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot A \cdot dr$ ein:

$dF=G \cdot m_r \cdot \rho \cdot A \cdot dr/r^2$

Der durch die Schale aufgebrachte zusätzliche Druck ist dp = dF/A. Wir berücksichtigten noch, dass der Druck nach außen hin abnimmt und erhielten durch Einsetzen für dF:

$dp/dr = - G \cdot m_r \cdot \rho \cdot /r^2$

Diese Gleichung beschreibt das hydrostatische Gleichgewicht. Zur Bestimmung von p(r) integrierten wir die obige Differentialgleichung wie folgt:

Zunächst setzten wir für $m_r = 4/3\ \pi \rho\ r^3$ ein:

$dp/dr = - 4/3\ \pi G \cdot \rho^2 \cdot r.$

Hier merkte jede Schülerin und jeder Schüler sofort:

$p(r) = - 2/3\ \pi G \cdot \rho^2 \cdot r^2 + q$

Dabei ist q eine Integrationskonstante. Am Sonnenrand R ist der Druck gleich 0:

$0 = - 2/3\ \pi G \cdot \rho^2 \cdot R^2 + q$

Also ist: $q = p(0) = 2/3 \pi G \cdot \rho^2 \cdot R^2 = 3{,}32 \cdot 10^{13}\ N/m^2$

Der Literaturwert ist [4] $p_C = p(0) = 3 \cdot 10^{16}$ Pa. Die grobe Abweichung ist durch die grobe Näherung konstanter Dichte zu erklären, die im nächsten Modell aufgehoben wird.

Zur Bestimmung von T(r) gingen wir von der allgemeinen Gasgleichung aus:

$p \cdot V = N \cdot k \cdot T$, mit $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K

Auflösen nach T ergab: $T = p \cdot V/(N \cdot k)$

Für die Teilchenzahl N setzten wir den Quotienten aus Sonnenmasse M und Teilchenmasse μ ein:

$T = p \cdot V \cdot \mu/(M \cdot k)$ $\quad | M = \rho \cdot V$

$T(r) = p(r) \cdot \mu/(\rho \cdot k)$

Also ergab unser Sternmodell 1 für die Temperatur im Zentrum $T(0) = 1{,}8 \cdot 10^6$ K, während der Literaturwert [4] $T_C = T(0) = 15{,}5 \cdot 10^6$ K beträgt.

Zur Berechnung der Leistung P des Sterns zerlegten die Schülerinnen und Schüler den Stern in Kugelschalen, siehe Abbildung 4. Für jede Kugelschale wurde die Temperatur T(r) bestimmt und daraus die Leistung pro Masse $\varepsilon(r)$ berechnet. Diese wurde mit der Masse dm der Schale multipliziert, das ergab die Leistung der Schale, P(r). Die Summe der Leistungen der Schale ergab die Leistung des Sterns. Die Schülerinnen und Schüler addierten die Leistungen P(r) und erhielten so für die Leistung der Sonne $P = 3 \cdot 10^{25}$ W. Der Literaturwert [4] beträgt $P = 3{,}85 \cdot 10^{26}$ W.

Zur Bestimmung der Oberflächentemperatur T gingen wir vom Stefan - Boltzmann – Gesetz [5] aus:

$P=4\pi R^2 \sigma T^4 \sigma$ die $\sigma = 5{,}77 \cdot 10^{-8}\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$

$P/(4\pi R^2 \sigma)]^{0{,}25} = 3031$ K. Der Literaturwert [6] ist 5785 K.

Insgesamt haben die Schülerinnen und Schüler dieses Sternmodell 1 für den Fall der Sonne weitgehend selbstständig gelöst. Das Sternmodell 1 liefert bereits eine Vorhersage für die Temperatur an der Oberfläche und kann daher leicht anhand dieser messbaren Größe beurteilt werden. Dies halte ich gerade aus didaktischen Gründen für sehr wichtig. Denn die Schülerinnen und Schüler haben nie zuvor in ihrem Leben ein derart kompliziertes Modell analysiert. Sie haben daher keine Erfahrung zur Beurteilung der verwendeten Näherungen. Sie sollen aber das Modell kritisch beurteilen können, denn nur so können sie zunehmend selbstständiger werden. Daher hat das Modell die Schülerinnen und Schüler in zweierlei Hinsicht selbstständiger gemacht: Sie lernten ein grundlegendes Sternmodell eigenständig zu lösen und zu beurteilen.

Nach diesem ersten Erfolg wollten die Schülerinnen und Schüler das vorhandene Modell verbessern. Ihnen war klar, was zu tun sei: Die Dichte konnte nicht konstant sein. Damit war das nächste Modell bereits definiert.

4. Sternmodell 2

Das obige Modell wollten wir dahingehend verbessern, dass die Dichte nicht mehr konstant ist. Was bestimmt dann die Dichte? Die Schülerinnen und Schüler merkten sofort, es ist die eigene Schwerkraft, die das Gas zusammenhält und zusammendrückt. Damit war das Verhalten eines Gasballs, der seiner eigenen Schwerkraft ausgesetzt ist, zu untersuchen.

Da sich der Stern im Weltall befindet, sind die Zustandsänderungen adiabatisch. Daher gilt die Poisson – Gleichung [7]: $p \cdot V^\gamma = \text{konst.}$ $\quad | \cdot V^{-\gamma}$

$p = \text{konst.} \cdot V^{-\gamma}$

Da die Masse des Sterns konstant ist, können wir die Konstante konst. durch eine andere Konstante K mal M^γ ersetzen. Das ergibt: $p = K \cdot M^\gamma \cdot V^{-\gamma} = K \cdot \rho^\gamma$

Diese Zustandsgleichung habe ich in einem Lehrervortrag hergeleitet, siehe Anhang 2. Sie wird polytrop genannt [8,9].

Nun erhielten die Schülerinnen und Schüler in einem zweiten Arbeitsblatt durch drei Aufträge zielorientierende Lernhilfen zur Herleitung einer passenden Differentialgleichung:

1. Bestimmen Sie eine Gleichung für dm_r/dr!
2. Die Zustandsgleichung und die zwei Gleichungen für dm_r/dr und dp/dr stehen den drei Unbekannten m_r, p und ρ gegenüber. Eliminieren Sie m_r, indem Sie die zwei Gleichungen für dm_r/dr und dp/dr zusammenfassen!
3. Eliminieren Sie p mit Hilfe der Zustandsgleichung!

Den ersten Auftrag führten die Schülerinnen und Schüler aus, indem sie die Masse dm der Kugelschale als die gesuchte Änderung der eingeschlossenen Masse m_r erkannten, siehe Abbildung 4: $dm_r = dm = A\cdot\rho\cdot dr = 4\pi r^2\cdot\rho\cdot dr$ und $dm_r/dr = 4\pi r^2\cdot\rho$

Diese Gleichung nannten wir Kontinuitätsgleichung.

Den zweiten Auftrag führten die Schülerinnen und Schüler aus, indem sie die Gleichung für dp/dr nach m_r auflösten, die resultierende Gleichung mit d/dr ableiteten und das Ergebnis mit der Gleichung für dm_r/dr gleich setzten:

$dp/dr = -G\cdot m_r\cdot\rho/r^2 \quad | \cdot -r^2/(G\cdot\rho)$

$m_r = -r^2\cdot dp/dr\cdot 1/(G\cdot\rho) \quad | \, d/dr$

$dm_r/dr = d/dr\,[-r^2\cdot dp/dr\cdot 1/(G\cdot\rho)] = 4\pi r^2\cdot\rho$

Den dritten Auftrag führten die Schülerinnen und Schüler aus, indem sie für p den obigen Ausdruck $K\cdot\rho^\gamma$ einsetzten:

$d/dr\,[-r^2\cdot(d/dr\,K\cdot\rho^\gamma)\cdot 1/(G\cdot\rho)] = 4\pi r^2\cdot\rho$

Die Anwendung der Kettenregel ergab:

$-K\cdot\gamma/G\cdot d/dr\,[r^2\cdot d\rho/dr\cdot\rho^{\gamma-2}] = 4\pi r^2\cdot\rho$

Diese völlig richtige von den Schüler hergeleitete Differentialgleichung brachte ich durch Einführung einiger Abkürzungen auf die übliche Form der Lane – Emden – Gleichung. Dieser Schritt schränkt die Selbstständigkeit der Schülerinnen und Schüler nicht wesentlich ein, da er lediglich eine Konvention darstellt:

Zunächst nennen wir die Dichte im Zentrum ρ_c Ferner führen wir für den Exponenten γ den Index n ein mit $\gamma = 1+1/n$. Weiter führen wir für die Dichte die dimensionslose Größe ϕ ein mit: $\rho = \rho_c\,\phi^n$

Einsetzen für ρ ergibt:

$-K\rho_c^{\gamma-2}\cdot n\cdot\gamma/G\cdot d/dr\,[r^2\cdot\phi^{n-1}\cdot d\phi/dr\cdot\phi^{n(\gamma-2)}] = 4\pi r^2\cdot\phi^n$

Mit $\gamma = 1 + 1/n$ ist:

$-K\rho_c^{1/n-1}\cdot(n+1)/G\cdot d/dr\,[r^2\cdot d\phi/dr] = 4\pi r^2\cdot\phi^n$

Nun wird auch r durch eine dimensionslose Variable ξ ersetzt gemäß $r = a\cdot\xi$:

$-K\rho_c^{1/n-1}\cdot(n+1)/G\cdot d/d\xi\,[\xi^2\cdot d\phi/d\xi] = 4\pi\xi^2\cdot a^2\cdot\phi^n$

Wir lösen nach $-\phi^n$ auf:

$K\rho_c^{1/n-1}\cdot(n+1)/(4\pi G\cdot a^2)\cdot\xi^{-2}\cdot d/d\xi\,[\xi^2\cdot d\phi/d\xi] = -\phi^n$

Der Faktor vor ξ^{-2} wird durch folgende Wahl des Parameters a zu 1:

$a^2 = K\rho_c^{1/n-1}\cdot(n+1)/(4\pi G)$

$\xi^{-2}\cdot d/d\xi\,[\xi^2\cdot d\phi/d\xi] = -\phi^n$

Das ist die Lane - Emden - Gleichung. Gleichwertig ist: $\phi'' = -\phi^n - 2/\xi\,\phi'$

Die Schülerinnen und Schüler lösten die Lane – Emden – Gleichung mit Hilfe des eulerschen Polygonzugverfahrens und der Tabellenkalkulation Excel. Zur Einführung des Verfahrens erhielten sie ein drittes Arbeitsblatt, siehe Anhang 1. Das Ergebnis für n = 3 ist in Abbildung 5 dargestellt.

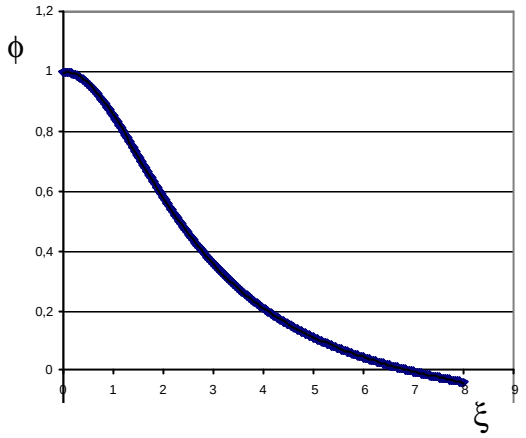


Abbildung 5: Lösung der Lane – Emden – Gleichung mit dem eulerschen Polygonzugverfahren für n = 3: Die Nullstelle ist bei $\xi(R) = 6{,}892$ und wird als Sternrand gedeutet. Denn für größere ξ wäre die Dichte negativ.

Bei der Sonne ist $R = 6{,}96\cdot 10^8$ m. Daher ist der Parameter $a = R/\xi(R) = 1{,}01\cdot 10^8$ m.

Als nächstes drückten wir die bekannte Sonnenmasse M durch die Variablen der Tabellenkalkulation aus:

$M = 4\pi\int_0^R r^2\,\rho\,dr = 4\pi\,\rho_c\,a^3\int_0^{\xi(r)}\xi^2\,\phi^n\,d\xi$

Nun brachten wir die Lane – Emden – Gleichung auf die obige Form:

$\xi^{-2}\cdot d/d\xi\,[\xi^2\cdot d\phi/d\xi] = -\phi^n \quad | \, \xi^2\int d\xi$

$[\xi^2\cdot d\phi/d\xi]_R = -\int_0^{\xi(r)}\xi^2\,\phi^n\,d\xi$

Der Ausdruck links wurde aus der Tabellenkalkulation abgelesen: $[\xi^2\cdot d\phi/d\xi]_R = -2{,}0$

Einsetzen ergab: $M = 8\pi\,\rho_c\,a^3 = 1{,}99\cdot 10^{30}$ kg

Auflösen brachte uns: $\rho_c = M/(8\pi a^3) = 76800$ kg/m^3

Der Literaturwert [4] ist $\rho_c = 160\,000$ kg/m^3.

Nun konnten wir den Verlauf der Dichte darstellen, siehe Abbildung 6. Wir erkannten, dass die Dichte im Zentrum mehr als 50 mal größer ist als nach Sternmodell 1. Das zeigte uns, dass unser zweites Modell eine wesentliche Veränderung brachte.

Als nächstes bestimmten wir die Konstante K für die Sonne: $a^2 = K \cdot \rho_c^{1/n-1} \cdot (n+1)/(4\pi G)$

Das ergab durch Auflösen:
$K = a^2 \, 4\pi G \cdot \rho_c^{1-1/n}/(n+1) = 3{,}86 \times 10^9 \text{ N} \times \text{kg}^{-4/3}\text{m}^{-2}$

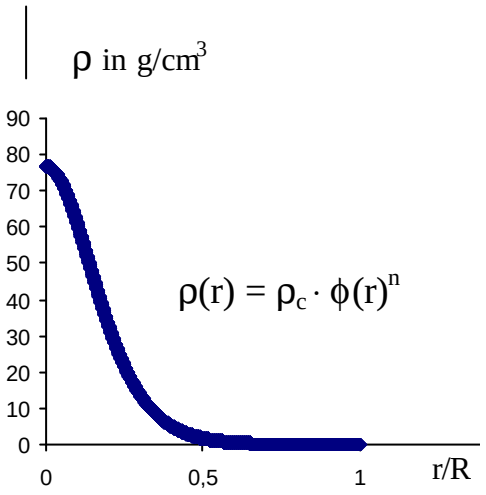


Abbildung 6 Verlauf der Dichte für die Sonne nach dem Sternmodell 2. R: Sonnenradius.

Per Definition ist $p = K \cdot \rho^{\gamma}$. Für das Zentrum fanden wir $p_C = 1{,}26 \cdot 10^{16}$Pa. Der Literaturwert ist [4] $p_C = 3 \cdot 10^{16}$Pa. So konnten wir auch den Druck als Funktion von r darstellen, siehe Abbildung 7.

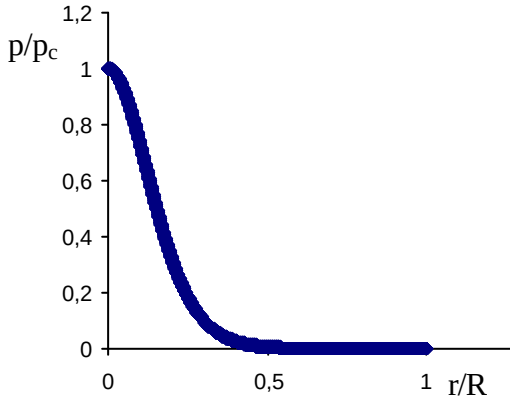


Abbildung 7: Verlauf des Druckes für die Sonne nach dem Sternmodell 2. R: Sonnenradius.

Zur Bestimmung des Temperaturverlaufes verwendeten wir die beim Sternmodell 1 hergeleitete Form der Zustandsgleichung: $T(r) = p(r) \cdot \mu/(\rho \cdot k)$
Einsetzen ergab für die Temperatur im Zentrum $T_C = 12{,}3 \cdot 10^6$K. Der Literaturwert [4] ist $T_C = 15{,}5 \cdot 10^6$K. Wir bestimmten den Temperaturverlauf, siehe Abbildung 8.

Sodann stellten wir den Verlauf der Reaktionsrate ε dar, siehe Abbildung 9.
Als nächstes bestimmten wir die Leistung P wie beim Sternmodell 1 und erhielten $P = 3{,}76 \cdot 10^{26}$W. Der Literaturwert ist $P = 3{,}85 \cdot 10^{26}$W.
Schließlich bestimmten wir die Oberflächentemperatur T wie beim Sternmodell 1 und erhielten T = 5710 K. Der Literaturwert [6] ist T = 5785 K.

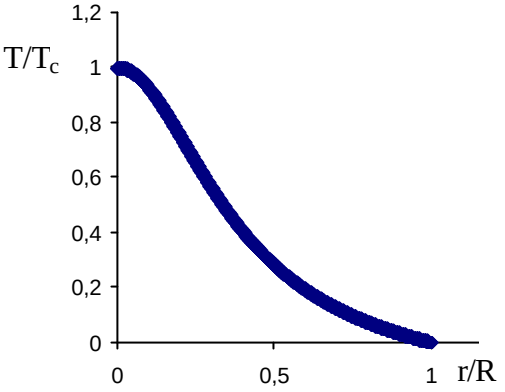


Abbildung 8: Verlauf der absoluten Temperatur für die Sonne nach dem Sternmodell 2. R: Sonnenradius.

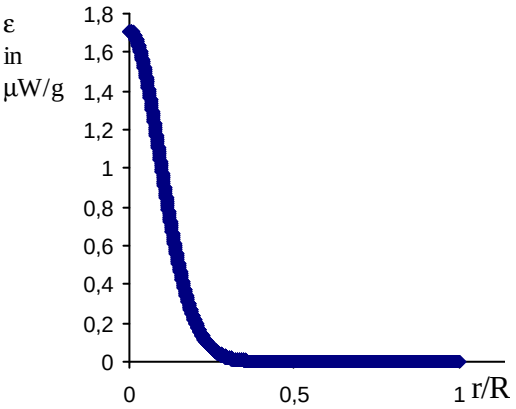


Abbildung 9: Verlauf der Reaktionsrate für die Sonne nach dem Sternmodell 2. R: Sonnenradius. Wir erkannten, dass die Fusion fast nur im Zentrum stattfindet und dass selbst dort die Rate sehr gering ist.

Insgesamt konnten die Schülerinnen und Schüler auch das Sternmodell 2 weitgehend selbstständig lösen und anhand der guten Übereinstimmung der berechneten und beobachteten Oberflächentemperatur zunächst positiv beurteilen, der relative Fehler beträgt 1,3 %.
Allerdings zeigte das Modell zwei Mängel:

- Die Energie wird hauptsächlich im Sterninneren freigesetzt und daher nach außen transportiert. Dieser Transport ist hier noch unberücksichtigt.

- Beim Sternmodell 2 werden die Masse M und der Radius R vorgegeben, also werden keine Relationen zwischen M und R vorhergesagt. In der Natur beobachtet man jedoch eine M-R-Relation, siehe Abbildung 10.

Beide Mängel sollten im nächsten Modell behoben werden.

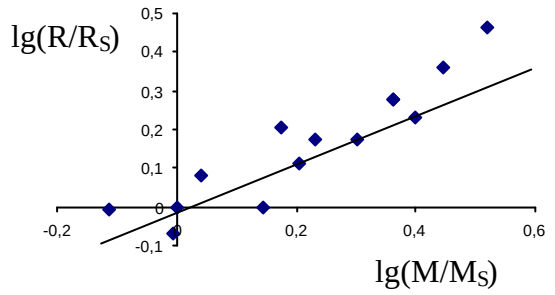


Abbildung 10: Masse – Radius – Relation: Für die Hauptreihensterne des vierten Arbeitsblattes sind die Radien abhängig von den Massen doppelt logarithmisch dargestellt. R_S: Sonnenradius. M_S: Sonnenmasse. Die Punkte scheinen auf einer Geraden zu liegen. Also scheint ein Potenzgesetz vorzuliegen. Gerade: Mit dem Sternmodell 3 hergeleitete Masse – Radius – Relation.

5. Sternmodell 3

Zunächst führte ich eine Gleichung für den Energietransport durch Strahlung ein, siehe Anhang 3.
Sodann stellten wir die sechs Systemgleichungen zusammen. Dabei wählten wir m_r als unabhängige Variable und schrieben statt m_r kurz m:

Zur obigen Kontinuitätsgleichung $dm_r/dr = dm/dr = 4\pi r^2 \cdot \rho$ bestimmten wir die Ableitung der Umkehrfunktion durch Kehrwertbildung:

$$dm = 1/(4\pi r^2 \cdot \rho) \quad [1]$$

Die obige Gleichung zum hydrostatischen Gleichgewicht, $dp/dr = - G \cdot m_r \cdot \rho \cdot / r^2$, kombinierten wir mit der Kontinuitätsgleichung gemäß der Kettenregel:

$$dp/dm = - G \cdot m/(4\pi r^4) \quad [2]$$

Die Leistung P(r), welche aus einer Kugel mit Radius r austritt, nimmt bei einer Massenzunahme dm_r um $\varepsilon \cdot dm_r$ zu. Also ist:

$$dP/ dm_r = \varepsilon \quad [3]$$

Die Gleichung für den Energietransport lautet, siehe Anhang 3:

$$dT/dm = - 3/(64\ \pi^2\ a \cdot c)\ P \cdot \kappa/(r^4 T^3) \quad [4]$$

$$\rho \propto p/T \quad [5]$$

Für die obige Energieproduktionsrate ε wird näherungsweise ein Potenzgesetz aufgestellt:

$$\varepsilon \propto \rho^{\lambda} T^{\nu} \quad [6]$$

Dabei ist der Exponent $\lambda = 1$. Für den Proton - Proton - Zyklus ist in etwa der Exponent $\nu = 4{,}5$. Für den CNO – Zyklus ist näherungsweise $\nu = 16{,}5$. Der Absorptionskoeffizient wird als konstant angenommen: $\kappa = \kappa'$

Diese Systemgleichungen sind allesamt Potenzfunktionen. Daher ergibt eine doppelt logarithmische Auftragung eine Gerade, siehe beispielsweise Abbildung 10. Das ergab unsere **erste Lösungsidee**: Wir wollten aus dem obigen System von 6 nicht linearen Gleichungen ein System linearer Gleichungen für Exponenten machen. Dazu benötigen wir eine gemeinsame Basis. Wegen der gesuchten Masse – Radius – Relation bietet sich das Massenverhältnis M/M' zweier Sterne an, dieses bezeichneten wir mit x = M/M'. Für die übrigen Größen zweier Sterne bildeten wir entsprechende Verhältnisse und drückten diese immer durch die Basis x aus:

$$R/R' = z = x^{z1}$$

$$p/p' = P_2 = x^{p1}$$

$$T/T' = t = x^{t1} \quad L/L' = s = x^{s1}$$

$$\rho/\rho' = d = x^{d1}$$

$$e/e' = e = x^{e1}$$

Nun kam die **zweite Lösungsidee**: Für Punkte mit r/R = r'/R' ist auch m/M = m'/M', siehe Anhang 4. Daraus folgten die beiden Gleichungen:

$$m/m' = x$$

$$r/r' = z = x^{z1}$$

Einsetzen Gleichung in [1] ergab:

$dr/dm = 1/(4\pi r^2 \rho) = dr'z/(dm'x) = 1/(4\pi r'^2 z^2 \rho' d)$

Für den zweiten Stern gilt die Systemgleichung [1] ebenfalls: $dr'/dm' = 1/(4\pi r'^2 \rho')$

Der Vergleich dieser beiden Gleichungen ergab:

$z/x = z^{-2} d^{-1}$

Durch Einsetzen der obigen Potenzen erhielten wir:

$x^{z1}\ x^{-1} = x^{-2z1}\ x^{-d1}$ So fanden wir für die Exponenten folgende lineare Gleichung: $z_1 - 1 = -2z_1 - d_1$

Entsprechend leiteten wir zu den Gleichungen [2] bis [6] weitere lineare Gleichungen her:

Für Gleichung [2] fanden wir: Einsetzen ergab:

$dp' P_2/(dm'x) = -Gm'x/(4\pi r'^4 z^4)$

Gleichung [2] für Stern': $dp'/(dm') = -Gm'/(4\pi r'^4)$

Aus beiden Gleichungen folgt: $P_2/x = x\ z^{-4}$ Einsetzen der Potenzen: $x^{p1}\ x^{-1} = x \cdot x^{-4z1}$ Vergleich der Exponenten: $p_1 - 1 = 1 - 4z_1$

Für Gleichung [3] fanden wir: Einsetzen ergab:

$dL's/(dm'x) = \varepsilon' e$

Gleichung [3] für Stern': $dL'/(dm') = \varepsilon'$ Aus beiden Gleichungen folgt: $s/x = e$

Einsetzen der Potenzen: $x^{s1}\ x^{-1} = x^{e1}$ Vergleich der Exponenten: $s_1 - 1 = e_1$ Für Gleichung [4] fanden wir: Einsetzen ergab:

$dT't/(dm'x) = -3/(64\pi^2 ac) L's\kappa/(r'^4 z^4 T'^3 t^3)$

Gleichung [4] für Stern‘:
$dT'/(dm') = -3/(64\pi^2 ac)\, L' \kappa/(r'^4 T'^3)$
Aus beiden Gleichungen folgt: $t/x = s\, z^{-4}\, t^{-3}$Einsetzen der Potenzen: $x^{t1}\, x^{-1} = x^{s1} \cdot x^{-4z1} \cdot x^{-3t1}$Vergleich der Exponenten: $t_1 - 1 = s_1 - 4z_1 - 3t_1$

Für Gleichung [5] bildeten wir den Quotienten:
$\rho/\rho' = d = (p/T)/(p'/T') = P_2/t$
Einsetzen der Potenzen: $x^{d1} = x^{p1}\, x^{-t1}$Vergleich der Exponenten: $d_1 = p_1 - t_1$

Für Gleichung [6] bildeten wir den Quotienten:
$\varepsilon/\varepsilon' = e = (\rho^{\lambda} T^{\nu})/(\rho'^{\lambda} T'^{\nu}) = P_2^{\lambda}\, t^{\nu-\lambda}$
Einsetzen der Potenzen: $x^{e1} = x^{\lambda \cdot p1}\, x^{(\nu-\lambda)\cdot t1}$Vergleich der Exponenten: $e_1 = \lambda \cdot p_1 + (\lambda - \nu) \cdot t_1$
Das Lösen des Systems dieser 6 linearen Gleichungen ergab:

$z_1 = (\lambda+\nu-2)/(3\lambda+\nu)$
$p_1 = 2-4z_1$
$t_1 = 1-z_1$
$s_1 = 3$

$z_1 = 0{,}6$.
Masse – Radius - Relation ist, siehe Abbildung 10: $R/R' = (M/M')^{z1} = (M/M')^{0,6}$Masse - Leuchtkraft - Relation ist, siehe Abbildung 11: $L/L' = (M/M')^{s1} = (M/M')^3$

Zur Herleitung der anfangs entdeckten Temperatur – Leuchtkraft – Relation ordneten wir mit Hilfe des Stefan – Boltzmann - Gesetzes der Leuchtkraft eine Temperatur zu:
$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$ ergab: $T = (L/[4\pi R^2 \sigma])^{0,25}$
Sodann bestimmten wir das Verhältnis:
$T/T' = [L/L' \cdot (R'/R)^2]^{0,25}$
Für $(R'/R)^2$ erhielten wir mit den beiden oben hergeleiteten Relationen:
$(R'/R)^2 = (M/M')^{-2z1} = (L/L')^{-2z1/s1}$
Einsetzen ergab:
$T/T' = (L/L')^{(1-2z1/s1)/4} = (L/L')^{0,15}$
Auflösen ergab:
$L/L' = (T/T')^{4s1/(s1-2z1)} = (T/T')^{6,7}$
Das ist die gesuchte Temperatur – Leuchtkraft – Relation, siehe Abbildung 3.

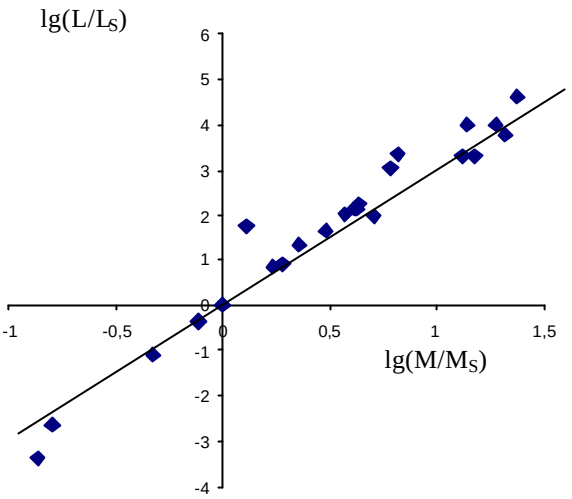


Abbildung 11: Masse – Leuchtkraft – Relation: Für die Hauptreihensterne des vierten Arbeitsblattes sind die Leuchtkräfte abhängig von den Massen doppelt logarithmisch dargestellt. L_S: Sonnenleuchtkraft. M_S: Sonnenmasse. Gerade: Mit dem Sternmodell 3 hergeleitete Masse – Leuchtkraft – Relation.

6. Diskussion

Der Schwierigkeitsgrad dieses Kurses war deutlich über dem an Gymnasien üblichen. Dennoch gibt es eindeutige Belege dafür, dass die Schülerinnen und Schüler intensiv und erfolgreich teilgenommen haben: Der Kursus war freiwillig und dennoch haben die Teilnehmerinnen und Teilnehmer nicht vorzeitig aufgehört. Die Schülerinnen und Schüler haben die Modelle 1 und 2 weitgehend selbstständig handschriftlich und am PC gelöst. Sie haben beim dritten Modell erfolgreich an der Tafel mitgearbeitet. Die Schülerinnen und Schüler haben die Modelle für den öffentlichen Astroabend richtig und selbstständig stark vereinfacht.

Nachdem Deutschland bei der letzten veröffentlichten PISA – Studie im internationalen Vergleich dadurch aufgefallen ist, dass sowohl die leistungsschwächeren noch die leistungsstärkeren Schülerinnen und Schüler relativ wenig spezifisch gefördert wurden, sollte man nicht voreilig den präsentierten Kursus als ungeeignet abtun. Wichtig ist ein differenziertes Angebot, das für alle Schülerinnen und Schüler das Passende beinhaltet.

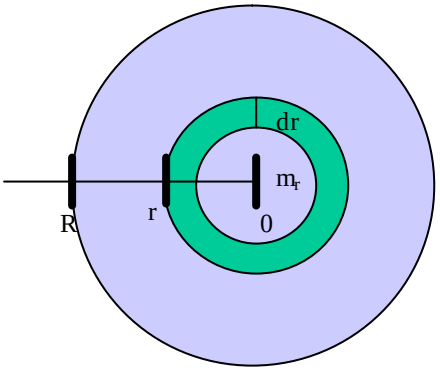
Das Entdecken der Hauptreihe wirft bei den Schülerinnen und Schülern die Frage nach den zugrunde liegenden physikalischen Prozessen auf. Die Beantwortung dieser Frage führt in harmonischer Weise zum Erkennen dieser Prozesse:

Die Schülerinnen und Schüler erleben hier, wie die Beobachtung Fragen an die Theorie aufwirft und wie die Theorie Aussagen macht, die durch die Beobachtung überprüfbar, also im Prinzip falsifizierbar, sind. Dabei untersuchen und beurteilen die Schülerinnen und Schüler die Modelle weitgehend selbstständig.

7. Anhänge

7a. Die vier Arbeitsblätter

Arbeitsblatt 1: Sternmodell 1: Gasball konstanter Dichte



Die Sonne hat den Radius R = 700000 km und die Masse $M = 2 \cdot 10^{30}$ kg. Die Materie ist ein ideales Gas. Die mittlere Masse pro Teilchen beträgt $1{,}04 \cdot 10^{-27}$ kg. Die Energieproduktionsrate (Leistung pro Masse) beträgt $\varepsilon = \rho \cdot 0{,}2583 \cdot T_6^{-2/3} \cdot \exp(-33{,}722 \cdot T_6^{-1/3})$ $m^3 \cdot W \cdot kg^{-2}$ mit $T_6 = T/(10^6\ K)$. Wir nehmen wir in grober Näherung an, die Dichte ρ sei konstant.

1. Bestimmen Sie die Dichte ρ!
2. Bestimmen Sie für den Druckverlauf p(r) die Ableitung bezüglich des Abstandes r zum Zentrum, dp/dr!
3. Bestimmen Sie den Druckverlauf p(r)!
4. Bestimmen Sie den Temperaturverlauf T(r)!
5. Bestimmen Sie daraus mit Hilfe der Energieproduktionsrate und einer Tabellenkalkulation die abgegebene Leistung!
6. Bestimmen Sie daraus die Temperatur der Schicht, welche die Leistung abstrahlt (Photosphäre)!

Arbeitsblatt 2: Sternmodell 2: Gasball variabler Dichte: Herleitung der Dichtedifferentialgleichung

1. Bestimmen Sie eine Gleichung für dm_r/dr!
2. Die Zustandsgleichung und die zwei Gleichungen für dm_r/dr und dp/dr stehen den drei Unbekannten m_r, p und ρ gegenüber. Eliminieren Sie m_r, indem Sie die zwei Gleichungen für dm_r/dr und dp/dr zusammenfassen!
3. Eliminieren Sie p mit Hilfe der Zustandsgleichung!

Arbeitsblatt 3: Sternmodell 2: Gasball variabler Dichte: Lösung der Lane-Emden-Gleichung mit dem eulerschen Polygonzug

1. Erstellen Sie einen eulerschen Polygonzug
   für n = 3 zu: $\phi'' = -\phi^n - 2/\xi \cdot \phi'$
   Startwert: $\phi(0)=1$ da $\rho = \rho_C \cdot \phi^n$
   Startwert: $\phi'(0)=0$ da es keine Dichtespitze gibt.
   Schrittweite: $\Delta\xi$
   $\phi(\xi+\Delta\xi) = \phi(\xi) + \phi'(\xi) \cdot \Delta\xi$
   $\phi'(\xi+\Delta\xi) = \phi'(\xi) + \phi''(\xi) \cdot \Delta\xi$
2. Bestimmen Sie aus der Lösung $\rho(r)$, p(r), T(r), P(r), P und T_{eff}!
   Hinweise: Radius $R=6{,}96 \cdot 10^8$ m; Masse $M=1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg; $\mu = 1{,}04 \cdot 10^{-27}$ kg

Arbeitsblatt 4: Sternenmodell 3: Gasball mit Energietransport

1. Bestimmen Sie aus den Gleichungen [2] – [4] je eine lineare Gleichung für Exponenten! Gehen Sie wie bei Gleichung [1] vor!
2. Bestimmen Sie aus den Gleichungen [5] und [6] je eine lineare Gleichung für Exponenten!
3. Lösen Sie das Gleichungssystem!
4. Bestimmen Sie die M-R-Relation!
5. Bestimmen Sie die Masse-Leuchtkraft- und Temperatur-Leuchtkraft-Relation!
6. Erstellen Sie zu den drei Relation die Diagramme mit Hilfe der Ergebnisse für die Sonne und der Daten für die Sterne!

Stern	T in K	L/L_S	R/R_S	M/M_S
eta cas	6160	0,955	0,85	0,99
alp psc	9700	23	1,7	2,5
alp gem	9280	37	2,3	2,8
xi uma	9490	64	2,9	3,3
gam vir	7600	5,3	1,3	1,6
gam vir B	7600	3,1	1	1,4
alp cen	5740	1,3	1,2	1,1
alp cen B	4600	0,41	0,99	0,77
eps lyr	8650	18	1,9	2,3
theta ser	8650	19	1,9	2,3
theta ser B	8650	12	1,5	2
gam del B	6640	4,4	1,6	1,5
zet aqr B	7440	6,4	1,5	1,7
Sonne	5785	1	1	1

Anhang 2: Zustandsgleichungen

Beim idealen Gas betrachten wir eine Luftpumpe mit einer Querschnittsfläche A, die mit einer Kraft F ein Stück ds zusammengeschoben wird, wobei das Gas in der Luftpumpe bei einem Druck p eingeschlossen ist, siehe Abbildung 12.

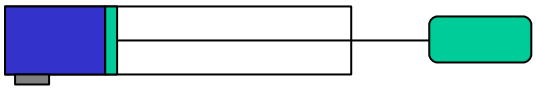


Abbildung 12: Luftpumpe als Beispiel für die adiabatische Kompression eines Gases.

Die Energie des Gases ändert sich dabei um:
$dE = F\ ds = p\ A\ ds = p\ dV$
Die Energie des Gases ist bei drei Freiheitsgraden nach dem Gleichverteilungssatz:
$E = 3/2\ N\ k\ T$Nach der allgemeinen Gasgleichung ist:
$E = 3/2\ N\ k\ T = 3/2\ p\ VdE = 3/2\ (p\ dV + V\ dp)3/2\ (p\ dV + V\ dp)\ V\ dp = -\ 5/3\ p\ dV$
$dp/p = -\ 5/3\ dV/V$
Durch Integrieren erhalten wir:
$\ln p = -\ 5/3\ \ln V + x \quad | \exp(...)$
$p = \exp(-5/3\ \ln V)\ e^x = V^{-5/3}\ e^x = r^{-5/3}\ m^{-5/3}$
e^xEs folgt die Proportionalität: $p \propto \rho^{5/3}$
Die Teilchenenergie beträgt grob E = kT. Die allgemeine Gasgleichung ist: pV = NkT = N E
$|:m,\ m = m/Np/\rho = 1/m\ E$
$|\ mal\ \rho p = \rho/m\ E \quad |E=E_{kin} = 0,5p^2/m$ mit
Impuls $p = h/\lambda p = \rho/m\ 0,5p^2/m = 0,5\rho/m^2\ h^2/\lambda^2$
Da der Raumbedarf eines Teilchens gemäß der Unschärferelation im Wesentlichen durch seine Wellenlänge gegeben ist, gilt grob $\rho = m/\lambda^3$
Es folgt die Proportionalität:
$p = 0,5h^2\ \rho^{5/3}\ \mu^{-8/3} \propto \rho^{5/3} p = \rho/m$ ENun ist
$E=E_{kin} = c \times p$ mit Impuls p
$p = \rho/m\ \ cp = \rho c/m\ h/\lambda \quad | \rho = m/\lambda^3$Es folgt die Proportionalität:
$p = ch\ \rho^{4/3}\ \mu^{-4/3} \propto \rho^{4/3} p = \propto$

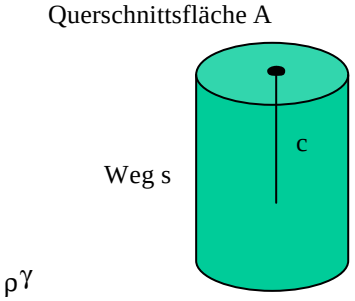


Abbildung 13: Strahlung strömt durch eine Querschnittsfläche A mit der Geschwindigkeit c und durchläuft während einer Zeit t die Strecke s=ct.

Anhang 3: Energietransport

Wir untersuchen den Energietransport durch Strahlung, weil der bei der Sonne einen großen Teil ausmacht. In einem Zylinder mit Querschnitt A, aus dem während einer Zeit t eine Energie E austritt herrscht die Leistungsdichte: S = E/(At), siehe Abbildung 13. Der während t von der Energie E zurückgelegte Weg ist: s=ct
Das von der Energie während t durchströmte Volumen ist: V=As
Daher ist der Quotient S/c gleich der Energiedichte U für eine Energiestrom in eine Richtung:$S/c=E/(Act)=E/V=U_{\text{eine Richtung}}$
Nach dem Stefan – Boltzmann – Gesetz ist:
$U_{\text{eine Richtung}} = \sigma_{\text{Stefan-Boltzmann}}\ T^4/c$
$U = 4\ U_{\text{eine Richtung}} = 4\ \sigma_{\text{Stefan-Boltzmann}}\ 1/c\ T^4$
Das ergibt: $U = a\ T^4$ mit $a = 7,6 \cdot 10^{-16}\ Jm^{-3}K^{-4}$
Absorptionskoeffizient: $\kappa = \sigma/m$
Daher ist:
$l_{Ph} = V/\kappa\ m1/(\kappa\rho)$
Typisch ist: $\kappa = 0,4\ cm^2/g$

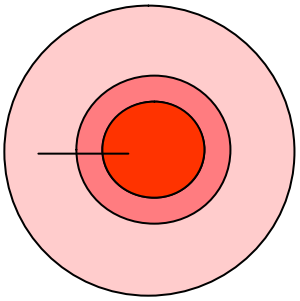


Abbildung 14: Energie wird vom inneren heißeren Bereich in den kälteren äußeren Bereich transportiert.

Die Photonen bewegen sich von innen nach außen und umgekehrt. Es bewegen sich mehr Photonen von innen nach außen, weil es innen heißer ist als außen, siehe Abbildung 14. Das wird durch die Diffusion der Photonen beschrieben:
Für eine Stromdichte j einer Dichte x gilt die anschauliche Relation (Ficksches Gesetz):
$j = -D\ dx/dr$ mit $D = 1/3\ v\ l_{Ph}$ $x=U$ und $j = S$. Also ist:
$S = -D\ \ dU/dr \quad | U = a\ T^4 S = -\ 4\ D\ a\ T^3\ dT/dr \quad | D=s.o.$
$S = -\ 4/3\ a\ c\ l_{Ph}\ T^3\ dT/dr \quad | l_{Ph}=s.o.$
$S = -\ 4/3\ a\ c\ T^3/(\kappa\rho)\ dT/dr$
Mit der Leistung $P = 4\pi r^2\ S$ folgt:
$P/(4\pi r^2) = -\ 4/3\ a\ c\ T^3/(\kappa\rho)\ dT/dr$
Auflösen ergibt:
$dT/dr = -\ 3\ \kappa\rho\ P/(16\pi r^2\ a\ c\ T^3)$

Mit der Kontinuitätsgleichung $dm/dr = 4\pi r^2 \rho$ ist: $dT/dm = -3\kappa P/(64\pi r^4 a c T^3)$

Anhang 4: Zur zweiten Lösungsidee

Die zweite Lösungsidee war, s. o.: Für Punkte mit $r/R = r'/R'$ ist auch $m/M = m'/M'$.

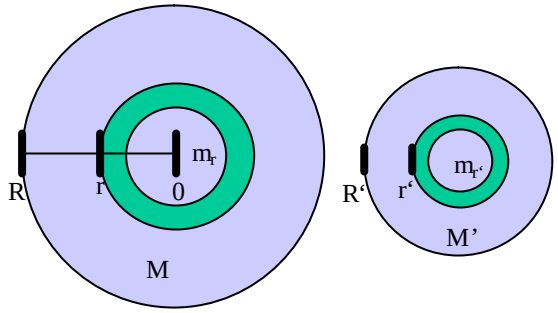


Abbildung 15: Zwei Hauptreihensterne unterschiedlicher Größe. Der große Stern hat einen Radius R und eine Masse M. Der kleine hat einen Radius R' und eine Masse M'. Die grüne Schale mit Radius r schließt die Masse m_r ein. Die grüne Schale mit Radius r' schließt die Masse $m_{r'}$ ein. Die beiden grünen Schalen entsprechen einander, wenn die Radiusverhältnisse gleich sind: $r/R = r'/R'$. Dann sind auch die Massenverhältnisse gleich: $m_r/M = m_{r'}/M'$. Das besagt die zweite Lösungsidee. Diese wird hier für Sterne, die der Lane – Emden – Gleichung entsprechen, bewiesen.

Wir zeigen, dass die zweite Lösungsidee für Sterne gemäß der Lane – Emden – Gleichung gilt:

Für $r/R = r'/R'$ ist $\xi = \xi'$

$m_r/M = \int_0^r \rho(r) r^2 \, dr \; / \int_0^R \rho(r) r^2 \, dr$

Setze $\rho = \rho_C \, \phi^n(\xi)$ und $\rho = a \, \xi$ ein:

$m_r/M = \int_0^\xi \rho_C \phi^n(\xi) \, \xi^2 \, d\xi a^3 \; / \int_0^1 \rho_C \phi^n(\xi) \, \xi^2 \, d\xi a^3$

Kürzen: $m_r/M = \int_0^\xi \phi^n(\xi) \, \xi^2 \, d\xi \; / \int_0^1 \phi^n(\xi) \, \xi^2 \, d\xi$

Das enthält nicht mehr die Stern-spezifischen Größen ρ_C und a. Also gilt:

$m_r/M = m_{r'}/M'$ q.e.d.

8. Literatur

[1] Gondolatsch, F. u.a.: Astronomie Grundkurs. Klett, Stuttgart 1990. S. 170-176.

[2] Sexl, R. u. Sexl, H.: Weiße Zwerge – Schwarze Löcher. Vieweg, Braunschweig 1977.

[3] Adelberger, E. u. a.: Solar Fusion Cross Sections. Rev. Mod. Phys., Band 70, Nr. 4, S. 1265-1291, 1998.

[4] Gondolatsch, F. u. a.: Astronomie Grundkurs. Klett, Stuttgart 1990. S. 96. und S. 108.

[5] Carmesin, H.-O., Entdecken des Stefan – Boltzmann – Gesetzes mit einem Flüssigkeitsthermometer. In: Tagungs-CD Fachdidaktik Physik, Deutsche Physikalische Gesellschaft, 2003, Deutsche Physikalische Gesellschaft. ISBN 3-936427-71-2.

[6] Karttunen, H. u. a.: Fundamental Astronomy. Springer, Berlin – Heidelberg – New York 1996. S. 299.

[7] Mirow, B.: Physik Formeln – Sekundarstufe II. Dümmler, Bonn 1993, S. 16.

[8] Brockhaus – Die Enzyklopädie in 24 Bänden, Band 17, Mannheim 1996.

[9] Kippenhahn, R. u. Weigert, A.: Stellar Structure and Evolution. 3. Auflage, Springer, Berlin – Heidelberg – New York 1994. S. 174-190.