Astronomie-AG, Dr. Hans-Otto Carmesin
Kurzentwurf für eine Astronomiestunde
Thema der Unterrichtseinheit: ART
Entdeckung der Lichtablenkung durch Gravitation
Didaktik: KUZ: Die Schüler können die Lichtablenkung begründen.

Inhaltliche Aspekte	Verhaltensaspekte dazu
LV: Konstanz von c	Erläutern
TZ:	Berechnen, Erläutern
TZ: relativistische Masse	Erläutern, Berechnen

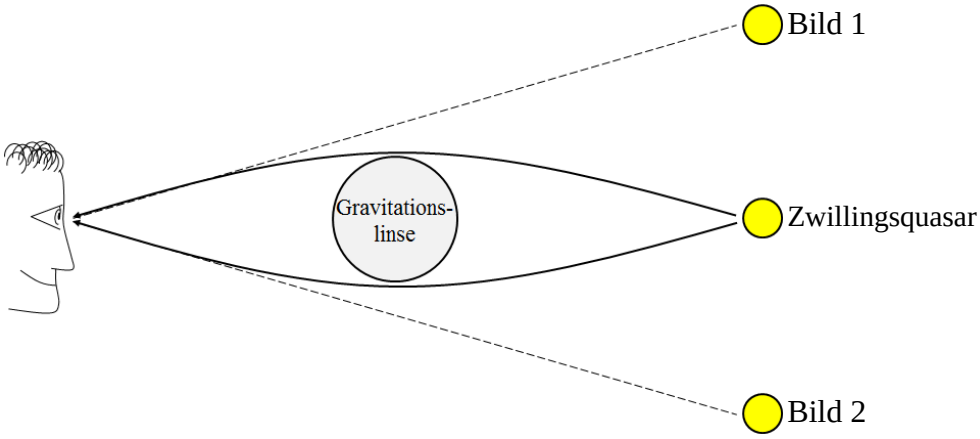
Methodik: Dominantes Lehrverfahren: Entdeckenlassend

Zeit	Didaktische Erläuterungen	Methodische Erläuterungen	Sozialform
5	Problemstellung: TA: Leitfrage	Foto, AB gemeinsame Helligkeitsänderung	LSG
10	Problemanalyse: Ideen s.u.	TA	LSG
30	Problemlösung: s.u.	Entstehung des Doppelbildes skizzieren, Winkel messen	GA
45	Sicherung: s. u.	SV, TA	SV

Geplantes Tafelbild

Warum ändern die beiden Punkte ihre Helligkeit stets gemeinsam?

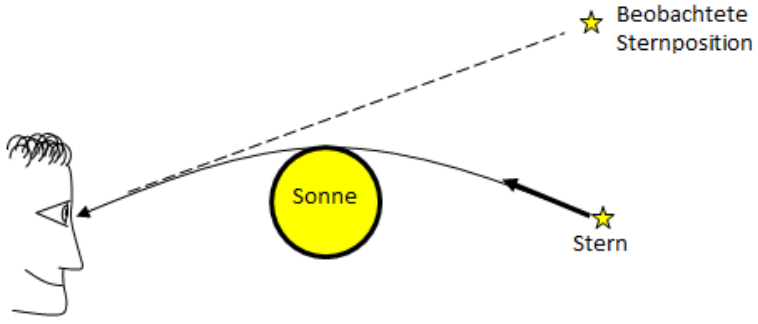
Ideen: Eine Lichtquelle, zwei Bilder, Lichtablenkung durch Gravitation



Lösungen:
Bildhöhe: 100 mm → 0,083°
1 mm → 0,00083°
Sehwinkel des Zwillingsquasars: 2 mm → 2·0,00083° = 0,00166° = 6‘‘

Ergebnis: Licht wird durch die Schwerkraft abgelenkt. Beim Zwillingsquasar beträgt der Sehwinkel 6‘‘.
Deutung: Da sich Licht möglichst geradlinig ausbreitet, ist der Raum gekrümmt.

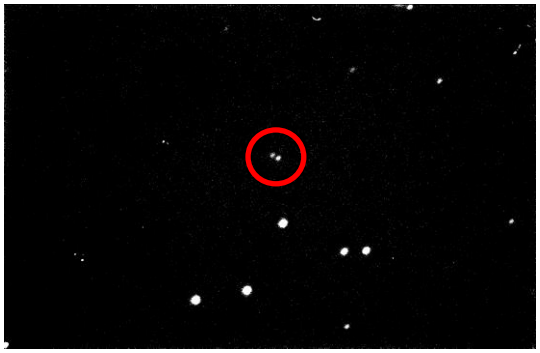
Weiteres Beispiel:



Licht, das die Sonne tangiert, wird um 1,74‘‘ abgelenkt.

Arbeitsblatt, Astronomie-AG, Dr. Carmesin

Bestimmung des Sehwinkels beim Zwillingsquasar



Zwillingsquasar: Foto Athenaeum, 17.7.15, C11, ST402, Belichtung 5 min, Kameratemperatur -10°C
Die Bildhöhe entspricht einem Sehwinkel von 0,083°:

Bestimme zu den beiden Bildern des Zwillingsquasars den Sehwinkel.

Astronomie-AG, Dr. Hans-Otto Carmesin
Kurzentwurf für eine Astronomiestunde
Thema der Unterrichtseinheit: ART
Entdeckung des Lichteinschlusses durch Gravitation

Didaktik: KUZ: Die Schüler können den Lichteinschluss begründen.

Inhaltliche Aspekte	Verhaltensaspekte dazu
LV: Gravitationsenergie	Erläutern, Berechnen
TZ: Fluchtgeschwindigkeit	Berechnen, Erläutern, Herleiten
TZ: Schwarzschildradius	Erläutern, Berechnen, Herleiten

Methodik: Dominantes Lehrverfahren: Entdeckenlassend

Zeit	Didaktische Erläuterungen	Methodische Erläuterungen	Sozialform
5	Problemstellung: TA: Leitfrage	Lichtablenkung zum Lichteinschluss	LSG
10	Problemanalyse: Ideen s.u.	TA	LSG
30	Problemlösung: s.u.	Herleiten	GA
45	Sicherung: s. u.	SV, TA	SV

Geplantes Tafelbild

Kann Licht einen Himmelskörper (Masse M, Radius R) verlassen, wenn es senkrecht nach startet?

Ideen: Analysiere senkrecht mit v startende Masse m, $E_{pot} = - m \cdot M \cdot G/R$; ersetze später v durch c

Lösungen:

$E = - m \cdot M \cdot G/R + m \cdot v^2/2 = - m \cdot M \cdot G/R_{oben}$ | $R_{oben} = \infty$

$- m \cdot M \cdot G/R + m \cdot v^2/2 = 0$ |+ $m \cdot M \cdot G/R_E$

$m \cdot M \cdot G/R = m \cdot v^2/2$ |·2/m Wurzel

$v = (2 \cdot M \cdot G/R)^{0,5}$

Für die Erde: v = 11,2 km/s

Licht: $c = (2 \cdot M \cdot G/R)^{0,5}$

Radius: $R = 2 \cdot M \cdot G/c^2$

Ergebnis: Ab der Geschwindigkeit $v_F = (2 \cdot M \cdot G/R)^{0,5}$ kann ein Körper den Himmelskörper verlassen. Beim Radius: $R_S = 2 \cdot M \cdot G/c^2$ kann Licht den Himmelskörper nicht verlassen.

Bezeichnungen: Die Geschwindigkeit v_F heißt Fluchtgeschwindigkeit. R_S heißt Schwarzschildradius.

Info: Die Fluchtgeschwindigkeit ist in der Raumfahrt die Geschwindigkeit, die eine Rakete beim Start erreichen muss, wenn sie anschließend ohne weiteren Antrieb einen Himmelskörper ganz verlassen will.

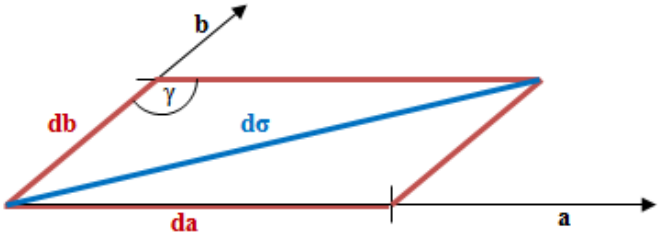
Astronomie-AG, Dr. Hans-Otto Carmesin
Kurzentwurf für eine Astronomiestunde
Thema der Unterrichtseinheit: ART
Entwicklung des metrischen Tensors
Didaktik: KUZ: Die Schüler können den metrischen Tensor erläutern.

Inhaltliche Aspekte	Verhaltensaspekte dazu
LV: Raumkrümmung	Erläutern
LV: Kosinussatz	Anwenden
TZ: metr. Tensor rechtwinklig	Erläutern
TZ: metr. Tensor	Erläutern, Berechnen

Methodik: Dominantes Lehrverfahren: Entdeckenlassend

Zeit	Didaktische Erläuterungen	Methodische Erläuterungen	Sozialform
5	Problemstellung: TA: Leitfrage	Abstandsberechnung aus Koordinaten	LSG
10	Problemanalyse: Ideen s.u.	TA	LSG
30	Problemlösung: s.u.	Herleiten	GA
45	Sicherung: s. u.	SV, TA	SV

Geplantes Tafelbild
Idee: Licht ist der Maßstab für Geradlinigkeit, z. B. mauert der Maurer mit Hilfe des Lasers geradlinig. Dann könnte bei der Sonne der Raum gekrümmt sein. Daher könnten Koordinatenlinien schiefwinklig sein.



Wie berechnen wir den Abstand vom Ursprung zum Punkt P(da;da) für schiefwinklige Koordinatenachsen?
Ideen: krummlinig → lokal schiefwinklig
Lösung:
Kosinussatz: $d\sigma^2 = da^2 + db^2 - 2\cdot\cos(\gamma)\cdot da\cdot db$
Ergebnis: Der Abstand eines Punktes (da;db) vom Ursprung ist im schiefwinkligen Koordinatensystem:
$d\sigma^2 = da^2 + db^2 - 2\cdot\cos(\gamma)\cdot da\cdot db$
Bezeichnungen: Die Faktoren vor den Produkten aus da und/oder db nennt man Elemente des metrischen Tensors: $d\sigma^2 = g_{aa}\cdot da\cdot da + g_{bb}\cdot db\cdot db + g_{ab}\cdot da\cdot db + g_{ba}\cdot db\cdot da$
Entsprechend ist: $g_{aa} = 1$, $g_{bb} = 1$ und $g_{ba} = g_{ab} = -\cos(\gamma)$

Astronomie-AG, Dr. Hans-Otto Carmesin
Kurzentwurf für eine Astronomiestunde
Thema der Unterrichtseinheit: ART
Bestimmung des radialen Tensorelements
Didaktik: KUZ: Die Lernenden können das Element $g_{rr}(r)$ des metrischen Tensors durch lineare Regression bestimmen.

Inhaltliche Aspekte	Verhaltensaspekte dazu
LV: Metrischer Tensor	Erläutern
LV: lineare Regression	Anwenden
TZ: $g_{rr}(\infty)=1$ & $g_{rr}(R_S)=\infty$	Begründen
TZ: $g_{rr} = 1/(1-R_S/r)$	Bestimmen

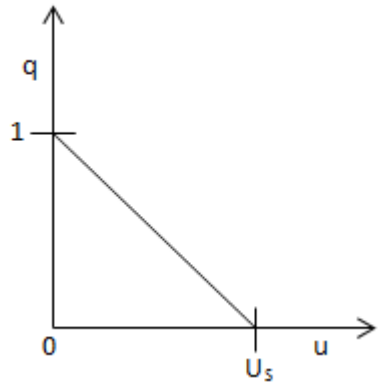
Methodik: Dominantes Lehrverfahren: Interaktiv erarbeitend

Zeit	Didaktische Erläuterungen	Methodische Erläuterungen	Sozialform
8	Stundenfrage: TA: Leitfrage	Raumdehnung möglich in Richtung der Schwerkraft: r	LSG
15	Analyse: Ideen s.u.	TA	LSG
45	Erarbeitung: s.u.	Begründung, Regression	GA
55	Sicherung: s. u.	SV, TA	SV

Geplantes Tafelbild

Wie hängt die Strecke $d\sigma^2 = g_{rr} \cdot dr^2$ bei einer Masse M von der radialen Koordinate r ab?

Ideen: bekannte Werte, Regression
Besondere Stellen:
OBEN: Für $r \rightarrow \infty$ ist F = 0, also keine Dehnung, also $g_{rr} = 1$ oder kurz $(r|g_{rr}) = (\infty|1)$
UNTEN: Beim Schwarzschildradius R_S kann senkrecht aufsteigendes Licht M nicht verlassen, obwohl es sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet. Daher muss die Strecke dσ unendlich groß sein. Für $r \rightarrow R_S$ geht daher $g_{rr} \rightarrow \infty$ oder kurz $(r|g_{rr}) = (R_S|\infty)$.
Vermeidung von Unendlichkeiten durch Kehrwerte:
Wir ersetzen r durch 1/u sowie g_{rr} durch 1/q und kürzen $1/R_S$ durch U_S ab.



Geradengleichung durch die beiden Punkte:
$q = 1 - u/U_S$
$g_{rr} = 1/(1-R_S/r)$
Ergebnis: Bei einer Masse M ist bei der radialen Koordinate r das radiale Element des metrischen Tensors $g_{rr} = 1/(1-R_S/r)$. Dieses Resultat erhielten wir durch zwei die Eigenschaften zweier Punkte und dadurch bestimmte Gerade.
Wegen $d\sigma^2 = g_{rr} \cdot dr^2$ verlängert sich somit eine Strecke in der Nähe einer Masse durch die Gravitation um den Faktor $1/(1-R_S/r)^{0,5}$.

Bezeichnung: Diese Metrik nennt man Schwarzschildmetrik.

Astronomie-AG, Dr. Hans-Otto Carmesin
Kurzentwurf für eine Astronomiestunde
Thema der Unterrichtseinheit: ART
Bestimmung der Winkelsumme eines rechtwinkligen Dreiecks
Didaktik: KUZ: Die Lernenden können die Winkelsumme bestimmen.

Inhaltliche Aspekte	Verhaltensaspekte dazu
LV: Schwarzschildmetrik	Erläutern
LV: Winkelsumme	Erläutern
TZ: Strecken in kleinen Dreiecken	Berechnen
TZ: Winkel	Berechnen

Methodik: Dominantes Lehrverfahren: Entdeckenlassend

Zeit	Didaktische Erläuterungen	Methodische Erläuterungen	Sozialform
5	Problemstellung: TA: Leitfrage	Winkelsumme im rechtwinkligen Dreieck am Globus mit Kantenlänge 10000 km ist 270°	LSG
10	Problemanalyse: Ideen s.u.	TA, AB	LSG
30	Problemlösung: s.u.	Herleiten	GA
45	Sicherung: s. u.	SV, TA	SV

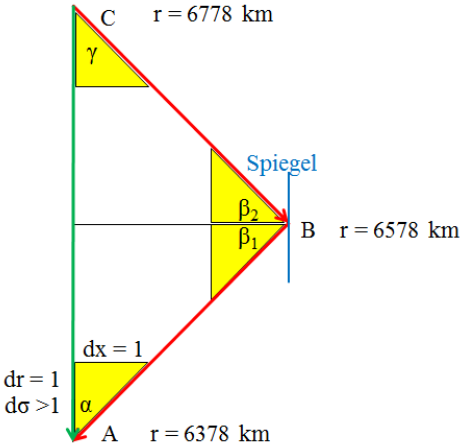
Geplantes Tafelbild

Wie groß ist die Winkelsumme in einem rechtwinkligen Dreieck?

Ideen: Waagerecht: keine Schwerkraft, keine Krümmung, 180°
Senkrecht, Strecken a, b, c aus $g_{rr} = 1/(1-R_S/r)$ berechnen, $\tan\alpha = a/b$
Lösung:
Schwerelos wäre $\alpha = \gamma = 45°$; $\beta = 90°$. Wir wählen dr = 1m = dx. RS = 8,85 mm. Waagerecht: dx = 1m
Wir berechnen α mit dem gelben Hilfsdreieck bei A: $d\sigma = dr/(1-RS/r)0{,}5$.
$d\sigma = 1m/(1-8{,}85mm/6378km)0{,}5 = 1m+693{,}791$ pm $\rightarrow \alpha = \arctan(1/d\sigma) = 45° - 19{,}8757n°$
Für β1 ist: $d\sigma = 1/(1-8{,}85mm/6578km)0{,}5 = 1m+672{,}697$ pm. $\beta 1 = \arctan(d\sigma) = 45° + 19{,}2714n° = \beta 2$
Für γ ist: $d\sigma = 1/(1-8{,}85mm/6778km)0{,}5 = 1m+652{,}848$ pm. $\gamma = \arctan(1/d\sigma) = 45° - 18{,}7027n°$.
Winkelsumme $\alpha + \beta 1 + \beta 2 + \gamma = 180° - 35{,}6p°$
Ergebnis: Die Winkelsumme ist kleiner als 180°: $\alpha + \beta + \gamma = 180° - 35{,}6p°$

Arbeitsblatt, Astronomie-AG, Dr. Carmesin

Wie groß ist die Winkelsumme im Dreieck auf der Erde?



Astronomie-AG, Dr. Hans-Otto Carmesin
Kurzentwurf für eine Astronomiestunde
Thema der Unterrichtseinheit: ART
Herleitung der gravitativen Zeitdilatation
Didaktik: KUZ: Die Lernenden können die Zeitdilatation herleiten und bestimmen.

Inhaltliche Aspekte	Verhaltensaspekte dazu
LV: Metrischer Tensor	Erläutern
LV: lineare Regression	Anwenden
TZ: $g_{tt}(\infty)=1$ & $g_{tt}(R_S)=0$	Begründen
TZ: $g_{tt} = 1\text{-}R_S/r$	Bestimmen

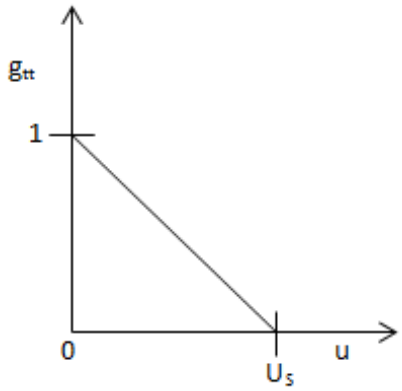
Methodik: Dominantes Lehrverfahren: Interaktiv erarbeitend

Zeit	Didaktische Erläuterungen	Methodische Erläuterungen	Sozial-form
8	Stundenfrage: TA: Leitfrage	Wegen Raumdehnung ist Zeitdilatation möglich beim Fallen	LSG
15	Analyse: Ideen s.u.	TA, binnendifferenzierend AB	LSG
45	Erarbeitung: s.u.	Begründung, Regression	GA
55	Sicherung: s. u.	SV, TA	SV
75	Konsolidierung	AB 2	

Geplantes Tafelbild

Wie hängt die Zeit $d\sigma^2 = g_{tt} \cdot dt^2$ bei einer Masse M von der radialen Koordinate r ab?

Ideen: bekannte Werte, Regression, analog wie bei g_{rr}
Besondere Stellen:
OBEN: Für $r \rightarrow \infty$ ist F = 0, also keine Änderung, also $g_{tt} = 1$ oder kurz $(r|g_{tt}) = (\infty|1)$
UNTEN: Unten muss die Uhr unendlich langsam gehen, s. AB: $g_{tt} \rightarrow 0$ für $r \rightarrow R_S$ oder kurz $(r|g_{tt}) = (R_S|0)$
Vermeidung von Unendlichkeiten durch Kehrwert: Wir ersetzen r durch 1/u und kürzen $1/R_S$ durch U_S ab.



Geradengleichung durch die beiden Punkte: $g_{tt} = 1 - u/U_S$

Ergebnis: Bei einer Masse M ist bei der radialen Koordinate r das zeitliche Element des metrischen Tensors $g_{tt} = 1–R_S/r$. Dieses Resultat erhielten wir durch zwei die Eigenschaften zweier Punkte und dadurch bestimmte Gerade.
Wegen $d\sigma^2 = g_{tt} \cdot dt^2$ verkürzt sich somit ein Zeitintervall in der Nähe einer Masse durch die Gravitation um den Faktor $(1\text{-}R_S/r)^{0,5}$.
Bezeichnung: Dies ist Teil der Schwarzschildmetrik.

Zum AB 2:
Zu 1. Da die Zeitdauer um den Faktor $(1\text{-}R_S/r)^{0,5}$ verkürzt wird, ist $t_{unten} = (1\text{-}R_S/r)^{0,5} \cdot t_{oben}$
Zu 2. Da kein Wellenberg verloren geht, ist $t_{unten} = n \cdot T_{unten}$. Also verringert sich auch die Periodendauer um den Faktor $(1\text{-}R_S/r)^{0,5}$. Somit gilt: $T_{unten} = (1\text{-}R_S/r)^{0,5} \cdot T_{oben}$
Zu 3. Da c eine Invariante ist und $c = \lambda/T$, verkürzt sich auch die Wellenlänge λ um den Faktor $(1\text{-}R_S/r)^{0,5}$. Daher gilt: $\lambda_{unten} = (1\text{-}R_S/r)^{0,5} \cdot \lambda_{oben}$
Info: Diese Effekte wurden bereits mehrfach gemessen und bestätigen die Schwarzschildmetrik.

Arbeitsblatt, Astronomie-AG, Dr. Carmesin

Wie hängt die Dauer $d\tau^2 = g_{tt} \cdot dt^2$ bei einer Masse M von der radialen Koordinate r ab?

Besondere Stellen:

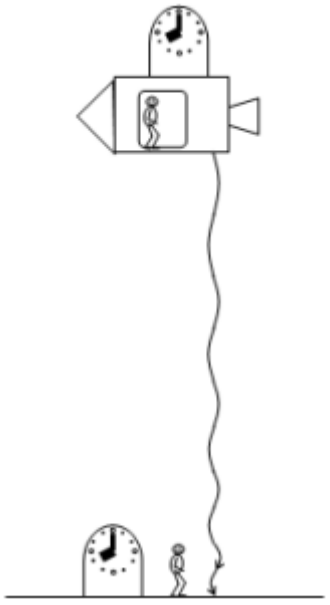
1) Für $r \to \infty$ ist $g_{tt} = 1$ oder kurz $(r|g_{tt}) = (\infty|1)$. Begründe.
2) Wenn ein Astronaut auf einen Himmelskörper Radius $R > R_S$ fällt, dann misst eine Uhr auf dem Himmelskörper eine endliche Falldauer.
   Wenn nun kurz nach dem Start des Astronauten ein Asteroid auf den Himmelskörper trifft, so dass sich dessen Masse vergrößert und dadurch $R < R_S$ ist, dann ist es plausibel, dass durch die zusätzliche Anziehung die Uhr auf dem Himmelskörper immer noch eine endliche Falldauer misst. Allerdings legt der Astronaut eine unendliche Strecke zurück, aber die Uhr zeigt eine endliche Falldauer. Dazu muss die Uhr unendlich langsam gehen. Bestimme g_{tt} für $r \to R_S$.

Vermeidung von Unendlichkeit durch Kehrwert:

Wir ersetzen r durch 1/u und kürzen $1/R_S$ durch U_S ab.

3) Rechne die beiden Stützstellen $(\infty|1)$ und $(R_S|0)$ in die neue Variable um.
4) Bestimme die Funktion $g_{tt}(u)$ durch die beiden Stützstellen als lineare Funktion.
5) Bestimme aus $g_{tt}(u)$ den Term $g_{tt}(r)$. Dieser Term beschreibt den Zeitfaktor bei einer Masse exakt und gehört auch zur Schwarzschildlösung.

Aufgabenblatt, Astronomie-AG, Dr. Carmesin



Anna sendet eine Lichtwelle wird von ihrem Raumschiff zu Bert, der sich auf einem Planeten mit Radius r und Schwarzschildradius R_S befindet. Das Raumschiff ist praktisch unendlich hoch über dem Planeten und das Licht hat eine Periodendauer T_∞. Sie sendet n Wellenberge während einer Zeit $t_{oben} = n \cdot T_\infty$ aus.

1. Bestimme einen Term für die Dauer t_{unten}, während der Bert die n Wellenberge empfängt.

2. Bestimme einen Term für die Periodendauer der Lichtwelle T_{unten}, die Bert misst.

3. Bestimme einen Term für die Wellenlänge der Lichtwelle λ_{unten}, die Bert misst, abhängig von λ_{oben}.

Astronomie-AG, Dr. Hans-Otto Carmesin
Kurzentwurf für eine Astronomiestunde
Thema der Unterrichtseinheit: ART
Analyse der Zeitdilatation bei Satelliten des GPS
Didaktik: KUZ: Die Lernenden können die Zeitdilation bestimmen.

Inhaltliche Aspekte	Verhaltensaspekte dazu
LV: Schwarzschildmetrik	Erläutern
LV: GPS, Uhren	Erläutern
TZ: Zeitdilatation	Berechnen
TZ: Auswirkung	Berechnen

Methodik: Dominantes Lehrverfahren: Entdeckenlassend

Zeit	Didaktische Erläuterungen	Methodische Erläuterungen	Sozialform
5	Problemstellung: TA: Leitfrage	GPS	LSG
10	Problemanalyse: Ideen s.u.	TA, AB	LSG
30	Problemlösung: s.u.	Herleiten	GA
45	Sicherung: s. u.	SV, TA	SV

Geplantes Tafelbild

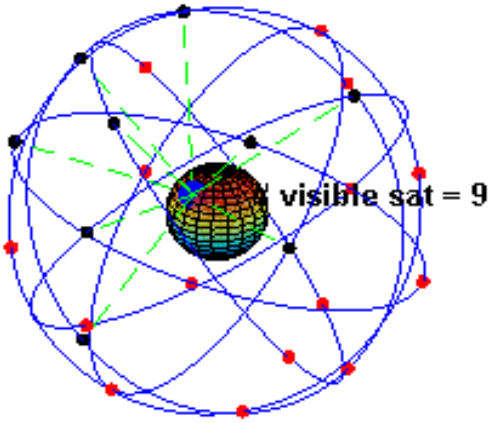
Wie gehen die Uhren auf den Satelliten des GPS?

Ideen: Funktionsweise des GPS …, $g_{tt} = 1\text{-}R_S/r$, Auswirkung auf Navigation berechnen
Lösung:
$g_{tt}(r_{Erde}) = 1 - 1{,}39 \cdot 10^{-9}$ $g_{tt}(r_{Sat}) = 1 - 0{,}33 \cdot 10^{-9}$
Für dt = 1s ist die Dauer $d\tau_{Erde} = dt \cdot [\, g_{tt}(r_{Erde}) \,]^{0,5}$ = 1s-694ps und $d\tau_{Sat} = dt \cdot [\, g_{tt}(r_{Sat}) \,]^{0,5}$ = 1s-166ps.
Die Abweichung beträgt 527ps je Sekunde oder 52,7 n%.
→ 45,6 µs pro Tag
→ 45,6 µs/Tag · 300000 km/s = 13,7 km/Tag → inakzeptabel → Die Uhr wird passend kalibriert.
Außerdem gibt es weitere Methoden, um diesen Fehler zu kompensieren. Beispielsweise nutzt üblicherweise der GPS-Empfänger die Zeitinformation der Satelliten mit. Bei einer Kommunikationsdauer von 0,1 s ergibt sich ein Zeitfehler von 52,7 ps und ein Streckenfehler von ungefähr 1,5 cm.

Info: Diese Zeitdilatation durch Gravitation wurde vielfach gemessen und bestätigt die Schwarzschildmetrik.

Arbeitsblatt

Wie funktioniert das GPS?



Flughöhe der Satelliten: 20200 km

1. Erkläre die Funktionsweise.
2. Bestimme den Gang der Uhren im Satellit sowie am Erdboden und vergleiche.