Mit dem Zwillingsparadoxon zur speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie

- Theaterpädagogik mit Spannung, Perspektivwechsel sowie einer Paradoxie und ihrer Auflösung mit Hilfe exakter Herleitungen wesentlicher Gleichungen zur SRT und ART durch die Schülerinnen und Schüler -

Hans-Otto Carmesin*

*Gymnasium Athenaeum, Harsefelder Straße 40, 21680 Stade; Studienseminar Stade, Bahnhofstraße 5, 21682 Stade; Universität Bremen, Fachbereich 1, Pf. 330440, 28334 Bremen
Hans-Otto.Carmesin@t-online.de

Kurzfassung

Lernende spielten auf einem öffentlichen und gut besuchten Astronomieabend in der Aula ein spannendes neues Theaterstück zum Zwillingsparadoxon: Eine Schülerin wurde versehentlich auf eine Zeitreise geschickt. Der Reisenden gelang die Umkehr und bei der Rückkehr war sie 27 Jahre jünger als ihre Zwillingsschwester. Die Lernenden berechneten den Altersunterschied und erkannten das Paradoxon: Wegen der Relativität der Geschwindigkeit könnte jede der beiden Zwillinge die Jüngere sein. Die Schüler lösten das Paradoxon mit einem Minkowski-Diagramm und der Raumkrümmung. So behandelte die Lerngruppe binnendifferenziert die SRT & ART und leitete dabei alle verwendeten Gleichungen her. Hierzu nutzten sie Lernwege, bei denen frühzeitig Dimensionen der Raumzeit separiert werden (Carmesin 2012).
Im Aufsatz stelle ich verschiedene Lernwege kritisch vergleichend vor. Das Projekt wurde von Lernenden der Klassen 5-12 einer Astronomie-AG durchgeführt. In Anbetracht der heterogenen Lerngruppe ist das Projekt ein Beispiel für inklusive Teilhabe an Bildung.

1. Einleitung

In diesem Aufsatz präsentiere ich eine Unterrichtseinheit mitsamt einem zugehörigen Schauspiel, in der folgende physikalische Inhalte behandelt wurden:

1.1. Physikalische Inhalte

Uhren sind allgegenwärtig, aber erst 1905 erkannte Einstein mithilfe der **Konstanz der Lichtgeschwindigkeit** (Michelson, Morley 1883), dass die **Zeit** entgegen der Alltagsvorstellung nicht immer absolut gleichmäßig abläuft, sondern dass Uhren bei hoher Geschwindigkeit relativ langsam gehen und der Zeitablauf insgesamt verlangsamt wird (Einstein 1905). Das ist ein Beispiel für die besondere **Kinematik der SRT**. Zudem wurde eine hohe sogenannte **relativistische Masse** beobachtet (Kaufmann 1901, Bucherer 1909) und ebenfalls mit der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit erklärt (Einstein 1905). Das ist ein Beispiel für die besondere **Dynamik der SRT**. Die **Schwerkraft** ist allgegenwärtig. Aber erst im Jahr 1686 formulierte Newton eine auch für den Mond und die Planeten brauchbare Regel, das Newton'sche Gravitationsgesetz (Newton 1687). Bereits im Jahr 1784 folgerte John Mitchell daraus, dass selbst Licht der Schwerkraft unterliegt und sogar von einem Stern mit sehr kleinem Radius, also hoher Dichte, am Entweichen gehindert wird (Harrison 1990). Der Radius, ab dem das passiert, heißt heute Schwarzschildradius. Auch in der Nähe des Schwarzschildradius gehen Uhren relativ langsam (Einstein 1915). Das ist ein Beispiel für die Krümmung der Raumzeit in der **Schwarzschildmetrik der ART.** Im Rahmen der ART verlaufen Lichtwege und Flugbahnen passend zur Krümmung der Raumzeit (Einstein 1915, Hilbert 1915). Das ist ein Beispiel für die **Bahnen der ART.**

1.2. Didaktisierung zur SRT

Die grundlegende Konstanz der Lichtgeschwindigkeit können Schülerinnen und Schüler anhand eigener Fotos eines photometrischen Doppelsterns selbst entdecken (Carmesin 2006). Daraus können sie wie üblich (Ackermann u. a. 2014) mithilfe von Lichtuhren die Kinematik der SRT herleiten und das Zwillingsparadoxon als kognitiven Konflikt folgern. Die Dynamik der SRT können die Lernenden direkt aus den Beobachtungen (Kaufmann 1901, Bucherer 1909) ermitteln oder durch übliche Gedankenexperimente (Ackermann u. a. 2014) herleiten.

1.3. Didaktisierung zur ART

Die Schwarzschildlösung können die Schülerinnen und Schüler besonders einfach durch die separate Analyse einzelner Dimensionen, durch ein Gedankenexperiment und eine Regression auf einfache Weise exakt mit Schulmitteln herleiten (Carmesin 2012).
Die Bahnen der ART können die Lernenden hier aus der Schwarzschildmetrik, der Newton'schen Gravi-

tationsbeschleunigung und den Huygens'schen Elementarwellen (Ackermann u. a. 2014) bestimmen. Dieser Lernweg ist besonders vorteilhaft, da er auf dem grundlegenden und einfachen Huygens'schen Prinzip fußt. Dieser Lernweg ist meines Wissens neuartig. Binnendifferenzierend leiten fortgeschrittene Lernende die Schwarzschildmetrik alternativ aus dem Lorentzfaktor und dem Prinzip der Energieerhaltung her. Dieser Lernweg fußt auf einfachen grundlegenden Prinzipien und ist möglicherweise auch neuartig. Binnendifferenzierend leiten fortgeschrittene Lernende auch die Bewegungsgleichung aus der Schwarzschildmetrik und dem Prinzip der Energieerhaltung her (Carmesin 2012). In der ART werden Bewegungsgleichungen für Bahnen gern aus einem Extremalprinzip hergeleitet (Stephani 1980), das in Schulbüchern auch Trödelprinzip genannt wird (Ackermann u. a. 2014). Binnendifferenzierend überprüfen fortgeschrittene Lernende dieses Prinzip in dieser Unterrichtseinheit.

1.4. Methode

Ein besonders einfacher Zugang zum Thema Zeit ist hier das Schauspiel, da auf der Bühne der Zeitablauf lebensweltlich darstellbar ist. Daher wurde dieses Medium gewählt. Zudem treten bei einer Zeitreise beide oben genannten Formen der Relativität der Zeit auf.

1.5. Lerngruppe

Die Schülerinnen und Schüler sind Mitglieder einer Astronomie-AG eines Gymnasiums und stammen aus den Klassenstufen 5-12. Entsprechend wird binnendifferenzierend unterrichtet.

1.6. Begründung der Ziele

Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass sich ihr Leben in Raum und Zeit abspielt und dass diese Raumzeit nicht immer so einfach strukturiert ist, wie es im Alltag scheint. Daher regt dieses Thema viele Lernende zum **Nachdenken** über die Natur an und viele wollen die Relativitätstheorie besser verstehen. Lernende können viele wichtige Kompetenzen entwickeln und geistige Kräfte entfalten, wenn sie sich mit diesem Thema befassen. Die Schülerinnen und Schüler können ihre Individualität und Persönlichkeit weiter entwickeln, wenn sie sich an einem anspruchsvollen Thema wie der SRT und ART erproben und ihre Erkenntnisse anderen in der Aula vermitteln. Insofern liefert das Projekt einen Beitrag zur Bildung, wie sie Humboldt 1792 formulierte: Bildung ist die Anregung aller Kräfte des Menschen, damit diese sich über die Aneignung der Welt entfalten und zu einer sich selbst bestimmenden Individualität und Persönlichkeit führen (Brockhaus 1996).

1.7. Materialien

In diesem Aufsatz werden die Lernwege dargestellt und erörtert. Die konkreten, sofort anwendbaren und erprobten Lehr- und Lernmaterialien stehen in multimedialer Form zum Herunterladen bereit und umfassen folgende Elemente (Carmesin 2016):

- Kurzentwürfe mit Arbeitsblättern
- Text zum Theaterstück
- Beamerpräsentation zum Schauspiel
- Einladung, Programm und Handout zum Schauspiel
- Simulationsprogramme

2. Lernweg zur SRT

Die SRT ist grundlegend zur Zeitdilatation und zum Zwillingsparadoxon. Daher wird hierzu die erste Unterrichtssequenz durchgeführt. Konkret wurden zur SRT folgende Stunden durchgeführt (Carmesin 2016):

1. Entdeckung der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit
2. Entdeckung der Zeitdehnung und des Lorentz-Faktors γ
3. Entdeckung des Zwillingsparadoxons
4. Erste Lösung des Zwillingsparadoxons im Minkowski-Diagramm
5. Entdeckung der relativistischen Masse
6. Entdeckung der Äquivalenz von Masse und Energie

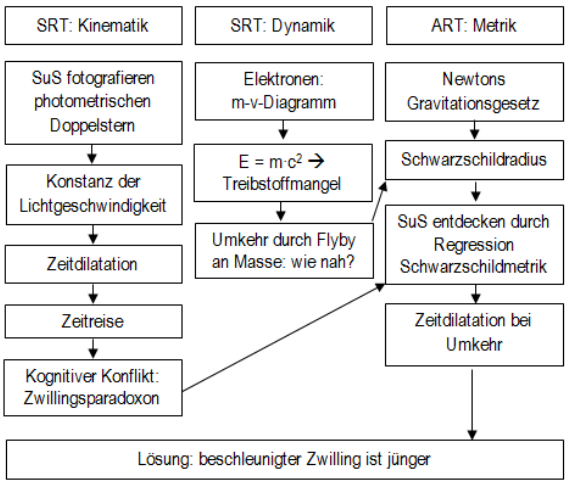

Abb. 1: Lernweg zum Zwillingsparadoxon

3. Lernweg im Schauspiel

Das Schauspiel führt zum Zwillingsparadoxon: Bei hoher Geschwindigkeit vergeht die Zeit verlangsamt und die Schwester Laura in der Rakete sollte langsamer altern – jedoch ist die Geschwindigkeit relativ und somit könnte es auch sein, dass die Schwester Deike auf der Erde langsamer altert. Inhaltlich entspricht das Schauspiel also im Wesentlichen der Unterrichtssequenz zur SRT. Die Lösung des Zwillingsparadoxons nehmen die Gäste in Form eines Handouts (Carmesin 2016) mit nach Hause. Kurz gesagt wird das Zwillingsparadoxon durch folgende Überlegung gelöst (s. Abb. 1): Die Schwester Laura möchte in ihrer Rakete gerne umkehren. Aus Treibstoffmangel lässt sie sich von einem Stern umlen-

ken, so wie sich ein Komet von der Sonne umlenken lässt. Der Stern hat eine sehr hohe Dichte und ändert in seiner Nähe die Raumzeit. Dazu leiten die Lernenden die Schwarzschildmetrik her (Carmesin 2012, 2016). Dabei erkennen sie, dass beim Umkehren die Zeit langsamer vergeht, als bei der Zwillingsschwester Deike auf der Erde. Damit ist Laura die jüngere Schwester und das Zwillingsparadoxon ist gelöst.

4. Lernweg zur Metrik der ART

Das Zwillingsparadoxon wird dadurch gelöst, dass die reisende Zwillingsschwester sich bei der Umkehr in einer gekrümmten Raumzeit befindet, in der die Zeit langsam vergeht. Die Beschreibung erfolgt im System des ruhenden Betrachters des Schauspiels durch die Schwarzschildmetrik. Daher ist das Paradoxon zielführend zur Einführung der Metrik der ART. Entsprechend wurde zur Metrik der ART eine zweite Unterrichtssequenz mit folgenden Stunden durchgeführt (Carmesin 2012, 2016):

1. Entdeckung der Lichtablenkung durch Gravitation
2. Entdeckung des Lichteinschlusses durch Gravitation
3. Entdeckung des metrischen Tensors
4. Bestimmung des radialen Tensorelements
5. Analyse der Winkelsumme im Dreieck bei Gravitation
6. Analyse der Zeitdilatation bei Himmelskörpern durch Gravitation
7. Analyse der Zeitdilatation bei Satelliten durch Gravitation

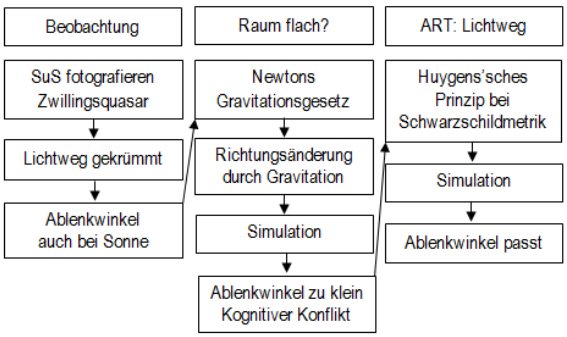

Abb. 2: Lernweg zum Lichtweg in der ART

5. Lernweg zum Lichtweg in der ART

Das Zwillingsparadoxon ist zwar mit der Metrik zur ART gelöst. Aber wir müssen noch überprüfen, ob die Umkehr bei der Zeitreise überhaupt möglich ist, immerhin fliegt Laura mit einer Geschwindigkeit von 99,5 % der Lichtgeschwindigkeit (Carmesin 2016). Hierzu wird der in Abb. 2 dargestellte Lernweg beschritten: Zunächst fotografieren die Lernenden den Zwillingsquasar (s. Abb. 3). Die beiden Bilder des Quasars stammen aus der gleichen Quelle, denn zeitliche Helligkeitsschwankungen sind identisch. Es scheint also zwei Lichtwege zu geben. Das Licht wird also durch eine Masse abgelenkt. Diese Erscheinung wurde schon 1919 bei der Sonne entdeckt und beträgt dort $\delta = 1{,}74$ Bogensekunden (Stephani 1980).

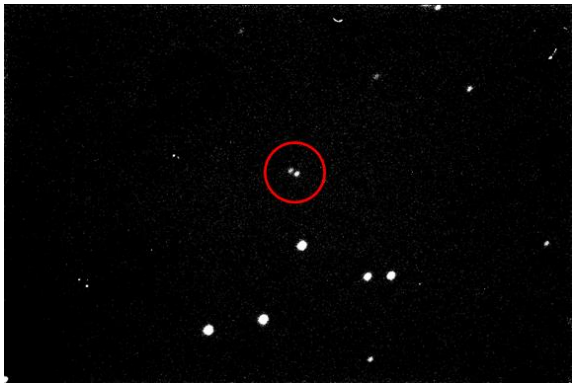

Abb. 3: Zwillingsquasar: Foto Athenaeum, 17.7.15, C11, ST402, Belichtung 5 min, Kameratemperatur minus 10°C.

Als erstes wollten wir diesen Lichtweg mit einem Computerexperiment nachbilden. Die Lernenden konnten bereits Planetenbahnen gemäß der Newton'schen Mechanik mit einem Euler'schen Polygonzug simulieren.

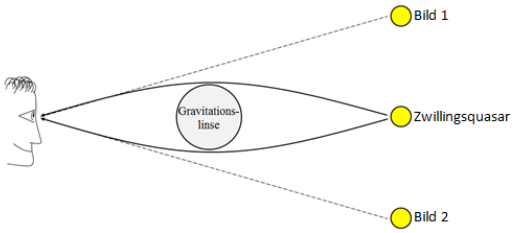

Abb. 4: Deutung des Zwillingsquasars.

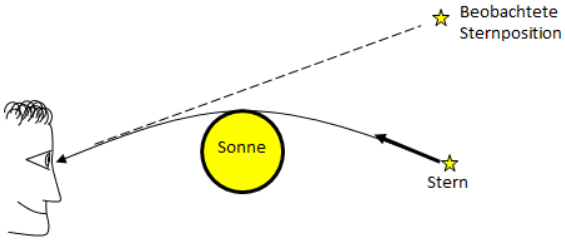

Abb. 5: Licht, das die Sonne tangiert, wird um 1,74" abgelenkt.

Die Gravitationsbeschleunigung a im Abstand r zu einer Masse M hat den Betrag:

$$a = \frac{G \cdot M}{r^2} \quad \{1\}$$

Dabei ist G die Gravitationskonstante. Die Proportionalität zu $1/r^2$ beruht darauf, dass die Feldlinien sich gleichmäßig auf eine Kugelfläche $A = 4\pi r^2$ verteilen. Das gilt auch bei der Schwarzschildmetrik und somit gilt auch hier der Beschleunigungsterm Gl. {1}. Beim Euler'schen Polygonzug berechnen

die Lernenden für jeden Zeitschritt Δt aus Gl. {1} die Geschwindigkeitsänderung

$$\Delta\vec{v} = \vec{a} \cdot \Delta t \quad \{2\}$$

und die Ortsänderung:

$$\Delta\vec{r} = \vec{v} \cdot \Delta t \quad \{3\}$$

Das Computerexperiment zur Dynamik mit den Gleichungen {1} bis {3} ergab für Licht, das tangential die Sonne passiert, den Ablenkwinkel δ = 0,87''. Das ist um einen Faktor zwei zu wenig. Dieser kognitive Konflikt (s. Abb. 2) führte zu einer Berücksichtigung der Schwarzschildmetrik:

Der Raum ist in der Nähe der Masse gekrümmt und das Licht breitet sich als Welle aus. Entsprechend der Schwarzschildmetrik hängt die Wellenlänge von der Entfernung r der Masse ab:

$$\lambda(r) = \lambda_\infty \cdot \sqrt{1 - R_S / r} \quad \{4\}$$

Dabei ist λ_∞ die Wellenlänge in unendlicher Entfernung und R_S der Schwarzschildradius:

$$R_S = \frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2} \quad \{5\}$$

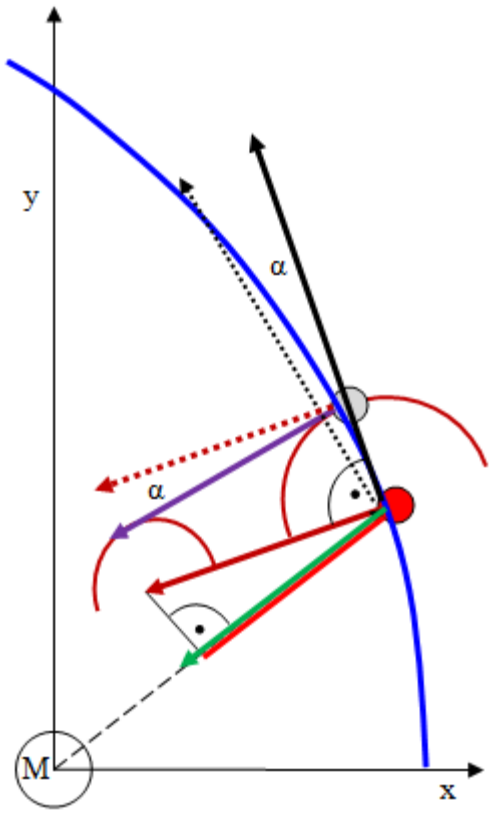

Abb. 6: Planfigur zur Richtungsänderung α der Wellenfront (dunkelrote Strecke, später violett) und damit der Bahn (blau) bei Licht aufgrund der Wellenlängenänderung und somit der Raumkrümmung in der Nähe einer Masse M.

Diese in Gl. {4} beschriebene r-abhängige Wellenlänge führt gemäß dem Huygens'schen Prinzip dazu, dass sich der Lichtweg zur Masse hin krümmt (s. Abb. 6): Von der dunkelroten Wellenfront gehen Huygens'sche Elementarwellen aus (zwei dunkelrote Kreise in Abb. 6), wobei der Kreis nahe M einen verkleinerten Radius hat. Nach dem Huygens'schen Prinzip ist die neue Wellenfront die Einhüllende an die Elementarwellen, diese kann hier als Tangente (violett in Abb. 6) gezeichnet werden. Die alte und neue Wellenfront schließen einen Winkel α ein, dieser Winkel beschreibt zugleich die Änderung der Ausbreitungsrichtung. Für diesen Winkel wird wie folgt eine Formel hergeleitet:

Für die Wurzel in Gl. {4} wird die Tangentennäherung aufgestellt:

$$\lambda(r) = \lambda_\infty - \lambda_\infty \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{R_S}{r} \quad \{6\}$$

Für die um eine Höhe h tiefere Elementarwelle gilt entsprechend:

$$\lambda(r-h) = \lambda_\infty - \lambda_\infty \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{R_S}{r} \cdot \frac{1}{1 - h/r} \quad \{7\}$$

Hier wird wiederum die Tangentennäherung angewendet:

$$\lambda(r-h) = \lambda_\infty - \lambda_\infty \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{R_S}{r} \cdot (1 + h/r) \quad \{8\}$$

Der Unterschied aus Gl. {6} und {8} ist somit:

$$\Delta\lambda = \lambda_\infty \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{h \cdot R_S}{r^2} \quad \{9\}$$

Wir nennen die Breite der Wellenfront w. Dann ist nach Abb. 6:

$$\alpha = \Delta\lambda / w \quad \{10\}$$

Die Höhe h ist das Skalarprodukt aus dem dunkelroten Vektor $\vec{w}$ und dem grünen Vektor $\vec{e}$ (s. Abb. 6):

$$h = \vec{w} \cdot \vec{e} \quad \{11\}$$

In der Zeit Δt wird die Strecke λ=c·Δt zurückgelegt. Hiermit und mit den Gl. {9} bis {11} ergibt sich:

$$\alpha = c \cdot \Delta t \cdot \frac{R_S}{2 \cdot r^2 \cdot w} \cdot \vec{w} \cdot \vec{e} \quad \{12\}$$

Die Lernenden ergänzen diese Winkeländerung bei jedem Iterationsschritt. Als Ergebnis erhalten sie im Computerexperiment nun den beobachteten Ablenkwinkel δ = 1,74''.

Als Fazit wird hier festgehalten, dass die Ausbreitung von Licht an der Sonne durch die Überlagerung von zwei Effekten modelliert werden kann:

Das Licht breitet sich in der Nähe einer Masse als Welle im gekrümmten Raum gemäß dem Huygens'schen Prinzip aus (s. Abb. 6 und Gl. {12}) und wird dabei in Richtung der Masse beschleunigt (s. Gl. {1}).

Die konkrete Umsetzung dieses Lernweges im Unterricht einschließlich einer quantitativen Auswertung zu Abb. 3 ist in (Carmesin 2016) dargestellt. Hierzu wurden folgende Stunden durchgeführt:

1. Herleitung von Energietermen zum Fallen
2. Herleitung der als Folge der Beschleunigung auftretenden Richtungsänderung
3. Herleitung der als Folge der Wellenlängenänderung auftretenden Richtungsänderung
4. Simulation von Lichtwegen mit Hilfe der beiden Richtungsänderungen

6. Lernweg basierend auf der Energieerhaltung

Die Schwarzschildmetrik wurde gemäß Abb. 1 mit Hilfe einer Regression hergeleitet. Wenn man eine völlig neue Theorie entwickelt, dann ist eine vollständige Herleitung prinzipiell unmöglich und eine Regression ein sinnvolles Verfahren. In diesem Fall ist alternativ eine Herleitung der Schwarzschildmetrik aus dem Lorentzfaktor und dem Prinzip der Energieerhaltung möglich. Auch dieser Lernweg wurde im Unterricht getestet (Carmesin 2016) und wird kurz dargestellt:

Ein Gegenstand der Ruhemasse m_0 im Abstand r von einer anziehenden Masse M hat bei einer Geschwindigkeit v den Energieterm:

$$E(r,v) = m_0 \cdot c^2 \cdot \gamma(v) \cdot \varepsilon(r) \qquad \{13\}$$

Dabei ist $\gamma(v) = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ der Lorentzfaktor und ε(r) ein zu bestimmender Lagefaktor, der die Lageenergie bestimmt. Das vollständige Differential ist:

$$dE = \frac{\partial E}{\partial v} \cdot dv + \frac{\partial E}{\partial r} \cdot dr \qquad \{14\}$$

Wegen der Energieerhaltung ist dieses null. Mit den Ableitungen $\partial E/\partial v = E \cdot \gamma^2 \cdot v/c^2$ und $\partial E/\partial r = \varepsilon' \cdot E/\varepsilon$ mit $\varepsilon' = \partial\varepsilon/\partial r$ ist:

$$0 = E \cdot \gamma^2 \cdot v \cdot dv/c^2 + dr \cdot \varepsilon' \cdot E/\varepsilon \qquad \{15\}$$

Division durch E sowie dt ergibt im Leibnizkalkül:

$$0 = \gamma^2 \cdot v \cdot a/c^2 + v \cdot \varepsilon'/\varepsilon \qquad \{16\}$$

Auflösen nach ε' ergibt:

$$\varepsilon' = -\gamma^2 \cdot a \cdot \varepsilon/c^2 \qquad \{17\}$$

Mit der Energieerhaltung ist $\gamma = 1/\varepsilon$. Mit den Gl. {1} und {5} sowie a < 0 erhält man die Differentialgleichung:

$$\varepsilon' = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{R_S}{2r^2} \qquad \{18\}$$

Die Lösung erhält man beispielsweise durch Trennung der Variablen:

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{R_S}{r}} \qquad \{19\}$$

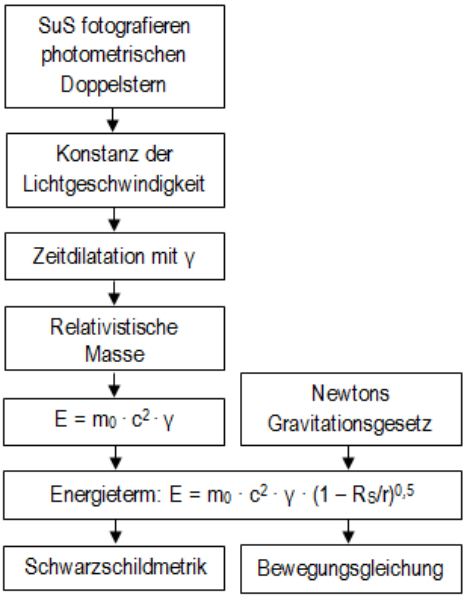

Abb. 7: Lernweg zum Energieterm

Durch eine schülergerechte konkrete Umsetzung dieser Überlegungen kann man im Unterricht (Carmesin 2016) diesen exakten Energieterm (Stephani 1980) herleiten. Aus dem Energieterm wird die Schwarzschildmetrik wie folgt hergeleitet:

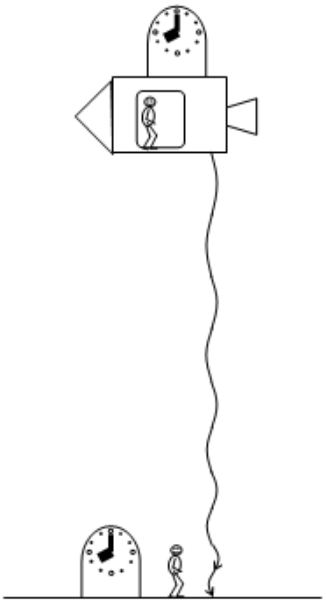

Abb. 8: Licht: Unten kommen so viele Wellenberge an, wie oben abgesendet werden.

Wir verallgemeinern den Lagefaktor von massiven Teilchen auf Photonen. Dann ist der invariante Energieterm eines Photons, das senkrecht fällt:

$$\frac{h}{T_\infty} = E = \frac{h}{T} \cdot \varepsilon \qquad \{20\}$$

Auflösen zeigt, dass die Periodendauer sich um den Lagefaktor ε verringert:

$$T = T_\infty \cdot \varepsilon \qquad \{21\}$$

Wenn die Rakete in Abb. 8 oben n Wellenberge sendet, dann vergeht die n-fache Periodendauer:

$$\Delta T_{oben} = n \cdot T_{\infty} \qquad \{22\}$$

Entsprechend wird unten die n-fache Periodendauer gemessen:

$$\Delta T_{unten} = n \cdot T_{\infty} \cdot \varepsilon = \sqrt{g_{tt}} \cdot \Delta T_{oben} \qquad \{23\}$$

Die Gleichungen {22} und {23} zeigen, dass die Zeit unten um den Faktor ε verlangsamt ist, also ist das entsprechende Element des metrischen Tensors:

$$g_{tt} = \varepsilon^2 = 1 - R_S / r \qquad \{24\}$$

Aus Gl. {21} folgt mit der invarianten Lichtgeschwindigkeit c = λ/T, dass sich die Wellenlänge unten um den Lagefaktor verkürzt:

$$\lambda = \lambda_{\infty} \cdot \varepsilon \qquad \{25\}$$

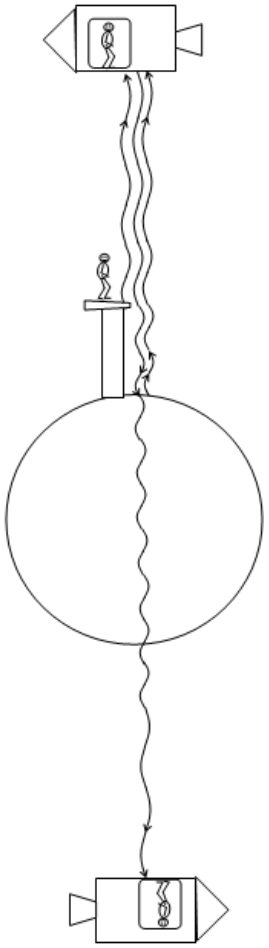

Abb. 9: Eine Lichtwelle von einer Rakete zur anderen umfasst durch die Wellenlängenverkürzung zusätzliche Wellenberge. Das erhöht die Laufzeit und somit die Strecke, denn c ist konstant.

Von der Rakete in Abb. 9 aus wird die Höhe ΔL des Sprungturms mit Hilfe der Lichtlaufzeit gemessen. Dabei wird festgestellt, dass der Turm n=2 Wellenlängen hoch ist:

$$n = \frac{\Delta L}{\lambda} = \frac{\Delta L}{\lambda_{\infty}} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \qquad \{26\}$$

Die Zahl der Wellenberge und damit die Strecke ΔL hat sich durch die Raumkrümmung also um den Faktor 1/ε erhöht. Damit hat ΔL den Betrag:

$$\Delta L = n \cdot T_{\infty} \cdot c \qquad \{27\}$$

Die Gleichungen {26} und {27} zeigen, dass die vertikale vom Licht zurückzulegende Strecke um den Faktor 1/ε vergrößert ist, also ist das entsprechende Element des metrischen Tensors:

$$g_{rr} = \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{1}{1 - R_S / r} \qquad \{28\}$$

Aus dem Energieterm kann man im Unterricht die Bewegungsgleichung herleiten (s. Abb. 7), die sowohl für Licht als auch für massive Teilchen anwendbar ist (Carmesin 2012).

Mit den entsprechenden Computersimulationen erhalten die Lernenden spielerisch die üblichen Bahnen (s. Abb. 10-13), Ellipsen, hyperbolische Kometenbahn, Periheldrehung, und Spirale mit Absturz, wie sie ähnlich bei der aktuell beobachteten Verschmelzung zweier schwarzer Löcher beobachtet wurde (Abbott et al. 2016).

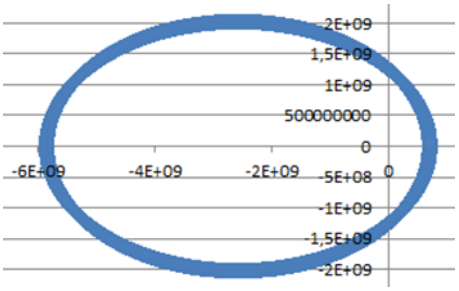

Abb. 10: Die Lernenden entdeckten bei ihren Computersimulationen elliptische Bahnen, die sie von Planeten her kennen.

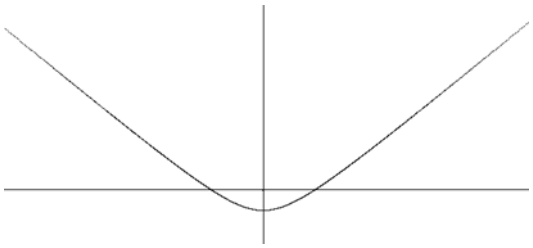

Abb. 11: Die Lernenden entdeckten hyperbolische Bahnen, die sie von nicht wiederkehrenden Kometen her kennen.

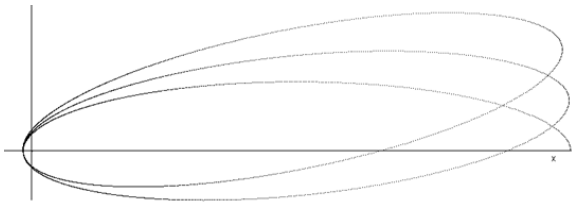

Abb. 12: Die Lernenden entdeckten die Periheldrehung, wie sie z. B. beim Merkur beobachtet wird.

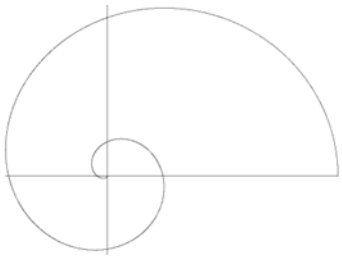

Abb. 13: Die Lernenden entdeckten Spiralbahnen, die erst in der ART berechnet werden.

Auch simulierten die Lernenden eine passende Bahn für die Umkehr der Rakete (s. Abb. 14).

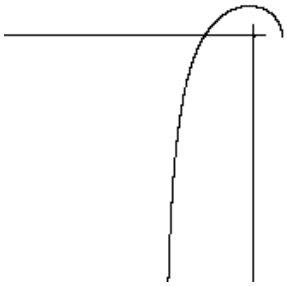

Abb. 14: Die Lernenden simulierten eine Bahnumkehr, die in der Zeitreise wichtig wird und wie sie beim Flyby-Manöver auftreten kann.

Der Unterricht ist in (Carmesin 2016) dargestellt. Hierzu wurden folgende Stunden durchgeführt:

1. Erkundung von Bahnen durch Simulation
2. Herleitung der Beschleunigung aus der Energie
3. Herleitung der Beschleunigung aus der Newton'schen Gravitationsenergie
4. Herleitung des Energieterms aus dem Lorentz-Faktor γ
5. Herleitung der Schwarzschildmetrik aus dem Energieterm
6. Herleitung einer Bewegungsgleichung aus der Energie- und Drehimpulserhaltung
7. Herleitung einer Formel zum Ablenkwinkel
8. Herleitung einer Formel zur Gravitationslinse
9. Überprüfung des Trödelprinzips

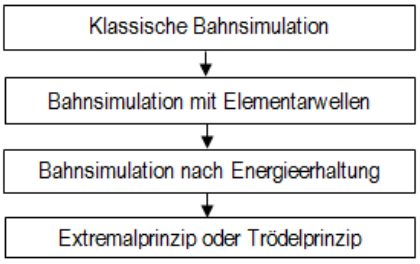

Abb. 15: Lernweg zu den Bahnsimulationen

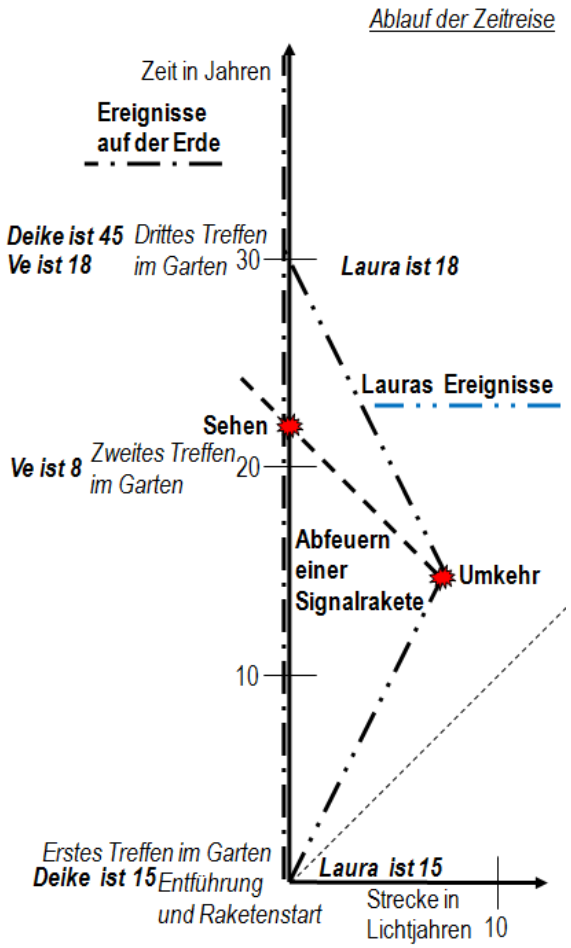

Abb.16: Übersicht zur Zeitreise

7. Lernweg zu Dynamiken

Die Lernenden entwickeln progressiv vier Dynamiken (s. Abb. 15), die klassische, die Erweiterung durch Elementarwellen, die Bahndynamik für Licht und massive Teilchen sowie die Überprüfung des Extremalprinzips. Hierzu wird für eine Bahn die Eigenzeit berechnet, die im bewegten Objekt vergeht. Dann wurden zu der mit der Bewegungsgleichung berechneten richtigen Bahn sinusförmige Abweichungen ergänzt. Diese Computerexperimente verkürzen immer die benötigte Eigenzeit. Das bestätigt das Prinzip, dass die tatsächliche Bahn relativ zu benachbarten Bahnen die Eigenzeit maximiert. Das Teilchen scheint also zu trödeln, daher die Bezeichnung Trödelprinzip (Ackermann u. a. 2014).

8. Diskussion

Es wurde gezeigt, wie Lernende der Klassenstufen 5-12 binnendifferenzierend, selbstständig und ausgehend von eigenen Fotos die SRT und die ART exakt entwickeln können. Im Vergleich dazu werden diese Themen in der Schulphysik meist näherungsweise oder vereinfachend behandelt (Schröter 2002, Ackermann u. a. 2014). Ein weiterer Vergleich mit der Hochschulphysik zeigt, dass dort diese Themen teils ohne Herleitung (Moore 2013, Will 2006) oder über den langwierigen Weg der Einstein-Gleichung dargestellt werden (Landau und Lifschitz 1981,

Stephani 1980, Straumann 2013). Insofern stellen die hier präsentierten Lernwege konsequent elementarisierte und zugleich exakte didaktische Rekonstruktionen dar (Kircher 2001, Bleichroth 1999).

Auch wurde gezeigt, wie die Lernenden anschließend ihre Erkenntnisse im Rahmen eines Schauspiels zu einer Zeitreise (s. Abb. 16) öffentlich präsentierten.

Insgesamt wurden besonders einfache und zugleich exakte Lernwege entwickelt. Diese sind hier präsentiert, zugehörige Unterrichtsentwürfe, Arbeitsblätter und Computersimulationen sind im Internet verfügbar (Carmesin 2016). Bei diesen Lernwegen können die Lernenden mit Hilfe von eigenen Beobachtungen und Computerexperimenten vieles selbstständig erkunden und entdecken.

9. Literatur

[1] Abbott, Benjamin P. et al. (2016): Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. In: Phys. Rev. Lett. 116, 6, 1-16.

[2] Ackermann, Peter, et al. (2014): Fokus Physik SII, Berlin: Cornelsen Verlag.

[3] Bleichroth, Wolfgang et al. (1999): Fachdidaktik Physik, 2. Auflage, Köln: Aulis Verlag Deubner.

[4] Brockhaus GmbH (1996): Brockhaus – Die Enzyklopädie. 20. Aufl. Bd. 3, S. 330.

[5] Bucherer, A. H. (1909): Die experimentelle Bestätigung des Relativitätsprinzips. Annalen der Physik, 333, 3, 513-536.

[6] Carmesin, Hans-Otto (2006): Entdeckungen im Physikunterricht durch Beobachtungen des Himmels. In: Didaktik der Physik, Beiträger zur DPG-Frühjahrstagung (2006) ISSN 798-386541-190-7.

[7] Carmesin, Hans-Otto (2012): Schüler entdecken die Einstein-Geometrie mit dem Beschleunigungssensor. In: PhysDid B (2012), ISSN 2191-379, DD15p06.

[8] Carmesin, Hans-Otto (2016): Mit dem Zwillingsparadoxon zur speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie – Bericht sowie Lehr- und Lernmaterial. http//hans-otto.carmesin.org/index.php.didaktik (Stand: 7.6.2016)

[9] Einstein, Albert (1905): Zur Elektrodynamik bewegter Körper. In: Annalen der Physik., 891-921.

[10] Einstein, Albert (1915): Die Feldgleichungen der Gravitation. In: Sitzungsberichte der preußischen Akademie der Wissenschaften, 25. November, 844-847.

[11] Harrison, Edward (1990): Kosmologie. 3. Aufl. Darmstadt: Verlag Darmstätter Blätter.

[12] Hilbert, David (1915): Die Grundlagen der Physik. In: Königliche Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen, 20. November, 395-407.

[13] Kaufmann, W. (1901): Die magnetische und elektrische Ablenkbarkeit der Bequerelstrahlen und die scheinbare Masse der Elektronen. Göttinger Nachrichten, 2, 143-168.

[14] Kircher, Ernst; Girwidz, Raimund; Häußler, Peter (2001): Physikdidaktik, 2. Aufl., Berlin: Springer Verlag.

[15] Landau, Lew; Lifschitz, Evgenij (1981): Lehrbuch der theoretischen Physik II - klassische Feldtheorie. Berlin: Akademie-Verlag.

[16] Michelson, Albert Abraham; Morley, Edward (1883): On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether. In: American Journal of Science, 34, 303, 203-345.

[17] Moore, Thomas (2013): A General Relativity Workbook. Mill Valley, California: University Science Books.

[18] Newton, Isaac (1687): Principia Naturalis Principia Mathematica. London: Jussu Societatis Regiæ ac Typis Joseph Streater.

[19] Schröter, Ulrich (2002): Allgemeine Relativitätstheorie mit Mitteln der Schulmathematik. In: Lotze, Karl-Heinz und Schneider, Werner (Hrsg.): Wege in der Physikdidaktik. Erlangen und Jena: Palm und Enke.

[20] Stephani, Hans (1980): Allgemeine Relativitätstheorie. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften.

[21] Straumann, Norbert (2013). General Relativity. 2. Auflage, Heidelberg - New York – London: Springer Dordrecht.

[22] Will, Clifford (2006). The Confrontation between General Relativity and Experiment. Living Rev. Relativity.

10. Danksagung

Ich danke der Dow Stade für die finanzielle Unterstützung, durch welche unsere Schulsternwarte eine Robotikmontierung kaufen konnte. Dadurch finden die Lernenden entfernte Himmelsobjekte schnell und zuverlässig.