Wir entdecken die Geschichte des Universums mit eigenen Fotos und Experimenten: Aufgaben

Hans-Otto Carmesin
Gymnasium Athenaeum Stade

8. März 2020

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung **5**

1 Von Gaswolken zu Sternen **5**

2 Sterne bilden Materiewellen **6**

3 Sterne ändern die Raumzeit **7**

4 Horizonte der Raumzeit **8**

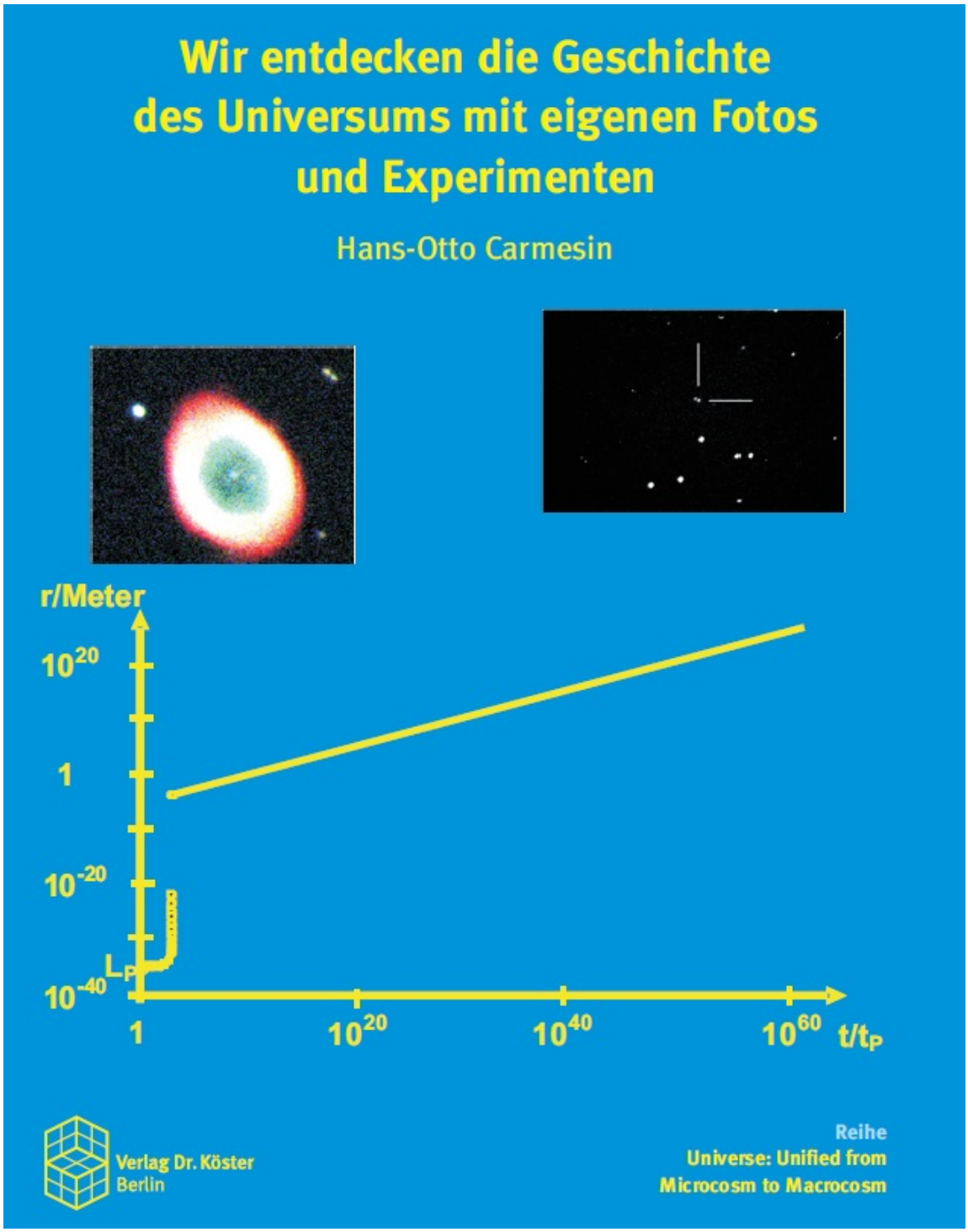
5 Makrodynamik der Raumzeit **9**

6 Mikrodynamik der Raumzeit **10**

7 Lösungen **12**

8 Diskussion und Ausblick **28**

9 Anhang **33**
9.1 Wir messen die Lichtgeschwindigkeit 33
9.2 Wir messen die Lichtgeschwindigkeit in Luft 33
9.3 Wir messen die Lichtgeschwindigkeit in Wasser 34
9.4 Kritische Dichten 35


Wir entdecken die Geschichte
des Universums mit eigenen Fotos
und Experimenten
Hans-Otto Carmesin
r/Meter
10^20
1
10^-20
10^-40
L_P
1
10^20
10^40
10^60
t/t_P
Verlag Dr. Köster
Berlin
Reihe
Universe: Unified from
Microcosm to Macrocosm

Wir sehen Sterne am Nachthimmel, eingebettet in unbegrenzte Weiten.

Und doch können wir im Universum ganz viel selbst entdecken, fotografieren und erklären. Dazu brauchen wir nur unsere Augen, ein Smartphone oder eine Kamera und unseren Verstand. Mit einem Fernrohr von 1 m Länge können wir sogar Fotos bis zum Ende des sichtbaren Universums aufnehmen.

So erhalten wir einen Überblick über diesen riesigen Weltraum, mit Sternentstehung, Sternexplosionen, Raumkrümmungen und Urknall. Wie verstehen wir das?

Wir können mit einfachen Versuchen die grundlegenden Naturgesetze mit ihren universellen Konstanten erkunden:

Die Gravitation mit der Gravitationskonstanten G,
die Thermodynamik mit der Boltzmann – Konstanten k_B,
die Relativitätstheorie mit der Lichtgeschwindigkeit c
und die Quantenphysik mit Plancks Wirkungsquantum h.

Damit können wir die Geschichte des Universums eigenständig erklären. Aber ist wirklich alles klar?

Es gibt spannende Rätsel. So zeigt das Cover die extrem schnelle Distanzvergrößerung im frühen Universum, ein heute kontrovers diskutiertes Rätsel. Wir kombinieren die vier Naturgesetze zur Quantengravitation und finden eine Lösung. Unser Test: Wir ermitteln aus den vier universellen Konstanten nach den Regeln der Quantengravitation präzise Übereinstimmung mit Beobachtungen. Mit der Quantengravitation können wir sogar weitere Geheimnisse des Universums lösen!

Wir, das sind Schulklassen oder Kurse ab Klassenstufe 10, Nachthimmel-Begeisterte, Hobby-Astronomen, experimentierfreudige Naturforscher ...

ISBN 978 - 3 - 89574 - 973 - 5

Universe: Unified from Microcosm to Macrocosm -
Die Grundschwingungen des Universums
Bd. 2

ISSN 2629-1525

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de abrufbar.

1. Auflage März 2020
Copyright 2020 Verlag Dr. Köster
10117 Berlin

Verlag Dr. Köster
Friedrichstr. 95
10117 Berlin

Tel. 030 76 40 32 24
info@verlag-koester.de

www.verlag-koester.de

ISBN 978-3-89574-973-5

0 Einleitung

Mit dem Buch *Wir entdecken die Geschichte des Universums mit eigenen Fotos und Experimenten* (Carmesin (2020)) können wir unser Universum selbst erkunden. Dazu können wir eigene Fotos aufnehmen, selbst experimentieren und eigenständig einfache Berechnungen durchführen. Begleitend gibt es zum Buch diese Übungsaufgaben. So können wir unsere Kompetenzen selbst überprüfen, trainieren und weiter entwickeln. Die Aufgaben sind nach den Kapiteln des Buches sortiert und nummeriert.

1 Von Gaswolken zu Sternen

Im ersten Kapitel (Carmesin (2020)) werden das Gravitationsgesetz, das universelle Gasgesetz, zugehörige mathematische Methoden wie Ableiten und Integrieren entwickelt und auf die Entstehung und Stabilisierung von Himmelskörpern angewendet.

A1.1 Freien Fall: Ein Stein mit der Masse 2 kg fällt in einen Brunnen geworfen. Es dauert 5 s, bis er unten ankommt.

a. Mit welcher Geschwindigkeit v trifft er am Boden auf?

b. Ermitteln Sie die Gewichtskraft F_G.

A1.2 Ableitung: Ermitteln Sie die Ableitungen.

a. $f(x) = x^3$

b. $a(t) = t^4 - 5 \cdot t^6$

c. $z(x) = 1/x^4$

A1.3 Gravitationsgesetz: Zwei Massen von je $m = 10$ kg haben einen Abstand von $r = 0{,}2$ m.

a. Ermitteln Sie die Gravitationskraft F_G.

b. Ermitteln Sie die Gravitationsfeldstärke der einen Masse am Ort der anderen Masse G^*.

A1.4 Integral: Ermitteln Sie die Integrale.

a. $I = \int_1^3 x^3 dx$

b. $I = \int_1^3 x^{-2} dx$

A1.5 Potentielle Energie: Ermitteln Sie die potentielle Energie E_G des Mondes im Gravitationsfeld der Erde. Daten: Die Massen der Erde und des Mondes betragen $m_{Erde} = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg und $m_{Mond} = 7,35 \cdot 10^{22}$ kg.

A1.6 Universelles Gasgesetz: Ein Atemgerät hat das Volumen $V = 4\,\mathrm{dm}^3$, und enthält bei einer Temperatur von $T = 300$ K eine Anzahl von $N = 10^{24}$ Teilchen mit einer Masse von je $m = 5,3 \cdot 10^{-26}$ kg.

a. Ermitteln Sie den Druck p.

b. Ermitteln Sie die mittlere Bewegungsenergie E_{kin} eines Teilchens.

c. Ermitteln Sie eine mittlere Geschwindigkeit v eines Teilchens.

2 Sterne bilden Materiewellen

Im zweiten Kapitel (Carmesin (2020)) werden die Wellen mit den Lichtwellen und den Materiewellen eingeführt. Auch werden die Lichtteilchen und die Eigenschaften von Teilchen der Materie behandelt. Darauf aufbauend werden die Quantenobjekte als Objekte mit Eigenschaften von Wellen und Eigenschaften von Teilchen eingeführt. Damit entdecken wir die Bedeutung von Quantenobjekten für die Entwicklung von Sternen, wobei wir auch stellare Gravitationsinstabilitäten erklären.

A2.1 Äquivalenz von Masse und Energie: Ein Elektron und sein Antiteilchen treffen aufeinander und wandeln sich dabei in zwei Photonen gleicher Energie E_γ um. Ermitteln Sie diese Energie. Hinweis: Ein Elektron und sein Antiteilchen haben jeweils die Masse $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg.

A2.2 Differentialgleichung, DGL: Ermitteln Sie die Funktionen.

a. $f'(x) = 2 \cdot f(x)$ mit $f(0) = 5$

b. $f''(t) = -4 \cdot f(t)$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 8$

A2.3 Wellen: Eine Lichtwelle mit der Wellenlänge $\lambda = 500$ nm wird an einem Doppelspalt mit dem Abstand der Mitten der Spalte von $b = 2000$ nm gebeugt.

a. Ermitteln Sie die Periodendauer T und die Frequenz.

b. Ermitteln Sie den Winkel α der ersten Beugungsordnung.

c. Ermitteln Sie die Energie E eines entsprechenden Photons.

d. Ermitteln Sie den Impuls p eines entsprechenden Photons.

A2.4 Erwartungswert: Ermitteln Sie die Erwartungswerte.

a. Wie groß ist $\langle x^3 \rangle$ beim Würfeln?

b. Wie groß ist $\langle x^3 \rangle$, wenn die Wahrscheinlichkeitsdichte eine $f(x)$ Gaußfunktion ist?

c. Wie groß ist $\langle x^2 \rangle$, wenn die Wahrscheinlichkeitsdichte die Gaußfunktion $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot \exp\left(\frac{-x^2}{2\cdot\sigma^2}\right)$ ist?

Hinweis: Verwenden Sie folgende Integrale aus Formelsammlungen:

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-x^2}{2\cdot\sigma^2}\right) dx = \sqrt{2\pi}\cdot\sigma \tag{1}$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-x^2}{2\cdot\sigma^2}\right) \cdot x^2 dx = \sqrt{2\pi}\cdot\sigma^3 \tag{2}$$

A2.5 Heisenbergs Unbestimmtheitsrelation: Ein Proton hat in einem Atomkern eine Ortsunbestimmtheit von $\Delta x = 7 \cdot 10^{-15}$ m. Ermitteln Sie die minimale Unbestimmtheit Δp_x der entsprechenden Komponenten des Impulses.

A2.6 Materiewellen: Elektronen werden mit der Spannung $U = 5000$ V beschleunigt.

a. Ermitteln Sie die Geschwindigkeit v.

b. Ermitteln Sie den Impuls p.

c. Ermitteln Sie die Wellenlänge λ.

A2.7 Elektronengas: In einem Elektronengas haben Elektronen die Wellenlänge $\lambda = 0{,}1$ nm. Die Wellenfunktion eines Elektrons erfordert im Wesentlichen das Volumen λ^3 und nach dem Pauli-Prinzip kann eine Wellenfunktion von zwei Elektronen besetzt werden. Daher beträgt die Teilchendichte der Elektronen $n = \frac{2}{\lambda^3}$.

a. Ermitteln Sie den Impuls $|p|$ eines Elektrons.

b. Ermitteln Sie die kinetische Energie eines Elektrons.

c. Ermitteln Sie die Teilchendichte n des Elektronengases.

d. Ermitteln Sie den Druck p des Elektronengases.

A2.8 Druck in der Sonne: Die Sonne hat einen Radius von $R_\odot = 0,7 \cdot 10^9$ m und eine Masse von $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ kg.

a. Ermitteln Sie die mittlere Dichte.

b. Ermitteln Sie unter der Annahme einer konstanten Dichte den Druck im Zentrum der Sonne.

c. Zeichnen Sie unter der Annahme einer konstanten Dichte den Verlauf des Drucks in der Sonne abhängig vom Radius.

3 Sterne ändern die Raumzeit

Wenn sich ein Stern oder ein anderes Objekt sehr schnell relativ zur Erde bewegt, dann können Messungen der Raumzeit, der Energie, der Masse oder des Impulses auf der Erde und auf dem Stern zu verschiedenen Ergebnisse führen. Um solche Erscheinungen nachvollziehen zu können, entwickeln wir wesentliche Ergebnisse der speziellen Relativitätstheorie, SRT.

Zudem krümmt ein Stern oder ein anderes massives Objekt die Raumzeit. Um solche Phänomene nachvollziehen zu können, entwickeln wir wesentliche Ergebnisse der allgemeinen Relativitätstheorie, ART. So stellen wir im dritten Kapitel (Carmesin (2020)) die SRT und ART bereit.

A3.1 Fluchtgeschwindigkeit und Schwarzschildradius der Sonne: Die Sonne hat einen Radius von $R_\odot = 0,7 \cdot 10^9$ m und eine Masse von $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ kg.

a. Ermitteln Sie die Fluchtgeschwindigkeit v_F.

b. Ermitteln Sie den Schwarzschildradius.

A3.2 Schnelle Myonen: Das Myon ist ein Elementarteilchen, ähnlich wie das Elektron. Es hat eine Halbwertszeit von $\tau = 1,52 \cdot 10^{-6}$ s und eine eigene Masse von $m_{eigen} = 1,88 \cdot 10^{-28}$ kg. In einem Beschleuniger werden Myonen auf eine Geschwindigkeit von 99 % der Lichtgeschwindigkeit gebracht, $v = 0,99 \cdot c$.

a. Ermitteln Sie die von einem Beobachter am Beschleuniger messbare Halbwertszeit τ_{rel}, nach der die Hälfte der Myonen zerfallen sind.

b. Ermitteln Sie die von einem Beobachter am Beschleuniger messbare Masse m_{rel} des Myons.

c. Ermitteln Sie die von einem Beobachter am Beschleuniger messbare Energie E des Myons.

d. Ermitteln Sie die von einem Beobachter am Beschleuniger messbare Bewegungsenergie E_{kin} des Myons.

e. Ermitteln Sie die von einem Beobachter am Beschleuniger messbaren Impuls p_{rel} des Myons.

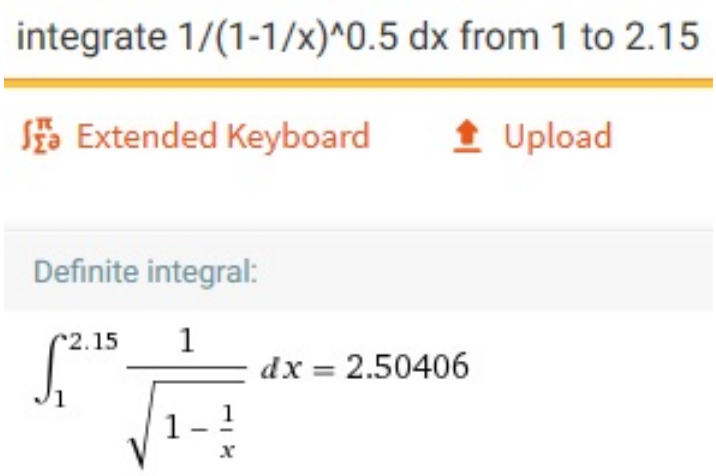


Abbildung 1: Berechnung des Integrals in Gleichung (78) mit einem Computeralgebrasystem.

A3.3 Expedition zu einem schwarzen Loch: Ein schwarzes Loch hat 10 Sonnenmassen, $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ kg.

a. Ermitteln Sie den Schwarzschildradius R_S.

b. Ein Raumschiff umkreist das schwarze Loch und legt bei einer Runde eine Strecke von 400 km zurück. Ermitteln Sie die radiale Koordinate r des Raumschiffs.

c. Ermitteln Sie die messbare Entfernung L bis zum Schwarzschildradius. Verwenden Sie dazu der Einfachheit halber ein Computerprogramm zum Lösen des Integrals (s. Abb. 1).

d. Ermitteln Sie, um welche Eigenzeit $\Delta t_{eigen}(r)$ eine Uhr auf dem Raumschiff weitergeht, während bei r gegen unendlich eine Uhr um $\Delta t = 100h$ weiter geht.

e. Das Raumschiff hatte bei r gegen unendlich bei gleicher Geschwindigkeit eine Energie von $E_\infty = 10^{21}$ J. Ermitteln Sie die aktuelle Energie des Raumschiffs.

f. Ermitteln Sie die Hawking - Temperatur des schwarzen Lochs.

4 Horizonte der Raumzeit

Wenn wir am Strand stehen und auf das Meer blicken, dann können wir bis zum Horizont blicken. Natürlich geht die Welt dahinter weiter, aber wir sehen es nicht von unserem Standort aus. Im vierten Kapitel (Carmesin (2020)) untersuchen wir allgemeiner grundsätzliche Grenzen des Beobachtbaren. Dabei entwickeln wir auch die DGL für die makroskopische Ausdehnung des Raums.

A4.1 Planck - Länge und Lichthorizont: Der Urknall fand vor $t_0 = 13{,}8$ Mrd. Jahren statt.

a. Berechnen Sie die Planck - Länge L_P in Metern.

b. Ermitteln Sie den Lichtweg $r_{lh,Lichtweg}$ bis zum Lichthorizont in Lichtjahren, in Metern und in Planck Längen.

A4.2 Raumausdehnung und Rotverschiebung: Wasserstoff sendet im Labor sichtbares Licht aus, das in drei Spektralfarben zerlegt werden kann: Eine dieser Spektralfarben ist Rot, wird mit H_α

gekennzeichnet und hat eine Wellenlänge von $\lambda_{H_\alpha} = 656,3\,\text{nm}$. Eine weitere dieser Spektralfarben ist Blau-Grün, wird mit H_β gekennzeichnet und hat eine Wellenlänge von $\lambda_{H_\beta} = 486,1\,\text{nm}$. Die dritte dieser Spektralfarben ist Violett, wird mit H_γ gekennzeichnet und hat eine Wellenlänge von $\lambda_{H_\gamma} = 434,0\,\text{nm}$.

a. In der von dem sehr entfernten Quasar APM08279+5255 ausgesendeten Strahlung werden folgende Wellenlängen festgestellt: $\lambda_1 = 3215,9\,\text{nm}$, $\lambda_2 = 2381,9\,\text{nm}$ und $\lambda_3 = 2126,6\,\text{nm}$. Deuten Sie die beobachteten Wellenlängen als Wellenlängen des Wasserstoffs und ermitteln Sie die Rotverschiebung z:

b. Ermitteln Sie den Quotienten $\frac{E'}{E}$, um den sich die Energie der Strahlung durch die Rotverschiebung z verringert hat.

5 Makrodynamik der Raumzeit

Im fünften Kapitel (Carmesin (2020)) entwickeln wir Lösungen zur DGL für die makroskopische Ausdehnung des Raums. So erhalten wir den Zeitverlauf der Ausdehnung des Raums. Damit entdecken wir auch, dass es noch einen weiteren Mechanismus der Distanzvergrößerung im Universum geben muss.

A5.1 Zeitverlauf der Raumausdehnung: Die DGL der Raumausdehnung ist ((Carmesin, 2020, Gl. 5.31)):

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi \cdot G}{3} \cdot (\rho_r + \rho_m + \rho_v) \tag{3}$$

a. Um für den Skalenradius a eine Größe x mit der Einheit 1 zu erhalten, teilt man durch einen Referenzwert: einen wählbaren Skalenradius a_0 zur heutigen Zeit t_0. Stellen Sie die DGL abhängig von $x = a/a_0$ dar: Hinweis: Schreiben Sie die Ableitung im Leibniz - Kalkül. Dann ist $\dot{a} = \frac{da}{dt}$ (Bos (1974)).

b. Wenden Sie folgende Relation für die Dichte an ((Carmesin, 2020, Gl. 5.34)):

$$\rho = \rho_{cr,t_0} \cdot x^{-4} \cdot (\Omega_\Lambda \cdot x^4 + \Omega_m \cdot x + \Omega_r) = \rho_r + \rho_m + \rho_v \tag{4}$$

c. Drücken Sie die kritische Dichte ρ_{cr,t_0} durch die Hubble - Konstante H_0 aus mit ((Carmesin, 2019, Gl. 2.6)):

$$\rho_{cr,t_0} = \frac{3 \cdot H_0^2}{8\pi \cdot G} \tag{5}$$

d. Drücken Sie dx abhängig von dt aus. Skalieren Sie die Zeit mit der Einheit $1/H_0$, also $dt \cdot H_0 = d\tau$.

e. Ermitteln Sie mit Eulers Verfahren den Zeitverlauf $x(\tau)$. Wählen Sie als Startwert $x = 1$ bei $\tau = 0$. Verwenden Sie dazu die Dichteparameter aus Tabelle (5.1). Verwenden Sie die Schrittweite $d\tau = -0,001$.

f. Ermitteln Sie die verwendete Zeiteinheit $1/H_0$ in s und in Mrd. Jahren. Verwenden Sie Tabelle (5.1).

g. Der Graph aus dem Euler Verfahren ergibt die Zeit $\tau = -0,951$, bei der $x = 0$ ist (Abb. 6). Ermitteln Sie daraus das Weltalter.

6 Mikrodynamik der Raumzeit

Im sechsten Kapitel (Carmesin (2020)) entwickeln wir wesentliche Ergebnisse der Quantenphysik. Damit analysieren wir die mikroskopische Dynamik der Raumzeit.

A6.1 Summen und Reihen:

a. Berechnen Sie: $\Sigma_{j=1}^{j=4} 0,1^j$.

b. Berechnen Sie: $\Sigma_{j=1}^{\infty} 0,1^j$.

c. Berechnen Sie: $\Sigma_{j=1}^{j=3} 0,5^j$.

d. Berechnen Sie: $\Sigma_{j=1}^{j=n} 0,5^j$.

e. Berechnen Sie: $\Sigma_{j=1}^{\infty} 0,5^j$.

A6.2 Komplexe Zahlen:

a. Berechnen Sie: $z = (3+2i) + (4-i)$.

b. Berechnen Sie: $z = (3+2i)^2$.

c. Berechnen Sie: $z = \sqrt{3,75+2i}$. Es gibt zwei Lösungen.

d. Berechnen Sie: $z = \sqrt[3]{8 \cdot e^{i \cdot \pi/4}}$. Es gibt drei Lösungen.

A6.3 Eigenwert: Ein Quantenobjekt wird durch folgende Wellenfunktion dargestellt:
$\psi = \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2} - i \cdot \omega \cdot t + i \cdot k \cdot x\right)$

a. Berechnen Sie den Eigenwert der Energie zu ψ.

b. Untersuchen Sie, ob ψ Eigenfunktion zum Impuls ist.

A6.4 Erwartungswert: Ein Quantenobjekt wird durch folgende Wellenfunktion dargestellt: $\psi = \exp\left(-x^2/2\right)$

a. Berechnen Sie den Erwartungswert zum Quadrat des Impulses

$$\langle p \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi \hat{p}^2 \psi dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dx} = -\hbar^2 \cdot \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi \partial_x^2 \psi dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dx} \tag{6}$$

A6.5 Minimierung der Energie E_D: Die reduzierte normierte Energie E_D ist ((Carmesin, 2020, Gl. 6.95 bis 6.97) mit $q = 1$):

$$E_{D,cl,G} = -\frac{1}{2} \cdot (2\tilde{\rho}_D)^{\frac{D^2-D}{2(D+1)}}, \tag{7}$$

außerdem

$$E_{D,Q} = (2\tilde{\rho}_D)^{\frac{3D^2-D-2}{4(D+1)}} \cdot \sqrt{\frac{D \cdot (D-2)}{2}} \tag{8}$$

und:

$$E_D = E_{D,Q} + E_{D,cl,G} \tag{9}$$

a. Ermitteln Sie mit einem Computerexperiment den dimensionalen Übergang zwischen drei und sieben Dimensionen. Hinweis: Stellen Sie mit einer Tabellenkalkulation beide Energien $E_{D=3}$ und $E_{D=7}$ abhängig von der Dichte $\tilde{\rho}_D$ dar, für $0,1 \leq \tilde{\rho}_D \leq 0,12$.

b. Ermitteln Sie die kritische Dichte $\tilde{\rho}_{D=3,c}$.

c. Ermitteln Sie die kritische Dichte $\tilde{\rho}_{D=7,c}$.

A6.6 Distanzvergrößerung: Völlig klar sind die beiden Vergrößerungsfaktoren: Der Faktor der Vergrößerung $q_{D_{max}\to t_0}$ von der Planck - Länge bis zum Lichthorizont beträgt $q_{D_{max}\to t_0} = 2,56 \cdot 10^{61}$ ((Carmesin, 2019, Gl. 6.105)). Der Streckfaktor $k_{D_{max}\to t_0}$ vom Zustand mit der Planck - Dichte bis zum Lichthorizont beträgt $k_{D_{max}\to t_0} = 2,96 \cdot 10^{31}$ (nach der Friedmann - Lemaître Gleichung, (Carmesin, 2019, Gl. 6.106)). Offensichtlich kann der Streckfaktor der Raumausdehnung den gesamten Vergrößerungsfaktor nur teilweise erklären. Wir analysieren hier den „fehlenden" Faktor:

a. Berechnen Sie den „fehlenden" Vergrößerungsfaktor der Distanz $Z_{D_{max}\to D=3}$.

b. Berechnen Sie den Dimensionshorizont D_{max} ((Carmesin, 2019, Glossar)).

c. Ermitteln Sie die Anzahl ungegliederter Regionen $n_{D=301}$ an einer Kante in $D = 301$ Dimensionen, sowie die Anzahl N dieser Objekte.

d. Ermitteln Sie die Anzahl ungegliederter Regionen $n_{D=3}$ an einer Kante in $D = 301$ Dimensionen. Nehmen Sie näherungsweise an, dass dabei eine Kugel ungefähr den Radius L_P hat. Ermitteln Sie die Entsprechende Kantenlänge in Metern.

A6.7 Zeitablauf: Die Dichte entwickelt sich mit folgender DGL ((Carmesin, 2020, Gl. 6.114)):

$$\dot{\tilde{\rho}}_D = -(D+1) \cdot \tilde{\rho}_D \cdot \sqrt{-2 \cdot E_D \cdot (2\tilde{\rho}_D)^{\frac{2}{D+1}}} \tag{10}$$

a. Ermitteln Sie mit dem Euler Verfahren den Zeitverlauf der Dichte $\tilde{\rho}_D(\tilde{t})$. Hinweise: Verwenden Sie die Schrittweite $d\tilde{t} = 0,01$. Aktualisieren Sie die Dimension, näherungsweise können sie dabei schrittweise mit den Dimensionen 301, 280, 260, 240, 220, 200, 180, 160, 140, 120, 100, 80, 60, 40, 30, 25, 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7 und 3 rechnen. Nutzen Sie die Tabelle der kritischen Dichten (1, 2, 3). Gehen Sie vereinfachend davon aus, dass das System sofort die Dimension wechselt, sowie die kritische Dichte erreicht ist, tatsächlich ist die Dynamik etwas langsamer (Carmesin (2019)).

b. Ermitteln Sie den Zeitverlauf des Distanzvergrößerungsfaktors mit dem Euler Verfahren ((Carmesin, 2020, Gl. 6.103)):

$$Z_{D_{max}\to D}(\tilde{t}) = n_{D_{max}}^{(D_{max}-D)/D} \tag{11}$$

Hinweis: Verfahren Sie wie bei Teil a und erstellen Sie das $Z_{D_{max}\to D}(\tilde{t})$ - Diagramm.

c. Ermitteln Sie den Zeitverlauf des Distanzvergrößerungsfaktors $Z_{D_{max}\to D}(\tilde{t})$ mit dem Euler Verfahren so, dass Sie davon ausgehen, dass die Dimension bei der Dichte $\tilde{\rho}_{D,ins}$ wechselt. Hinweis: Verfahren Sie wie bei den Teilen a und b.

A6.8 Gesamter Zeitablauf: Stellen Sie den Zeitverlauf während der Phasenübergänge zusammen mit dem der Raumausdehnung in einem gemeinsamen Diagramm dar.

a. Ermitteln Sie die Dynamik der Raumausdehnung mithilfe von Integralen. Gehen Sie dazu von Gl. (99) aus:

$$dx = d\tau \cdot x^{-1} \cdot \sqrt{\Omega_\Lambda \cdot x^4 + \Omega_m \cdot x + \Omega_r} \tag{12}$$

Um das Integral $\int dx$ bilden zu können, bringen wir alle Terme mit x auf die linke Seite des Gleichheitszeichens:

$$\frac{x}{\sqrt{\Omega_\Lambda \cdot x^4 + \Omega_m \cdot x + \Omega_r}} dx = d\tau \tag{13}$$

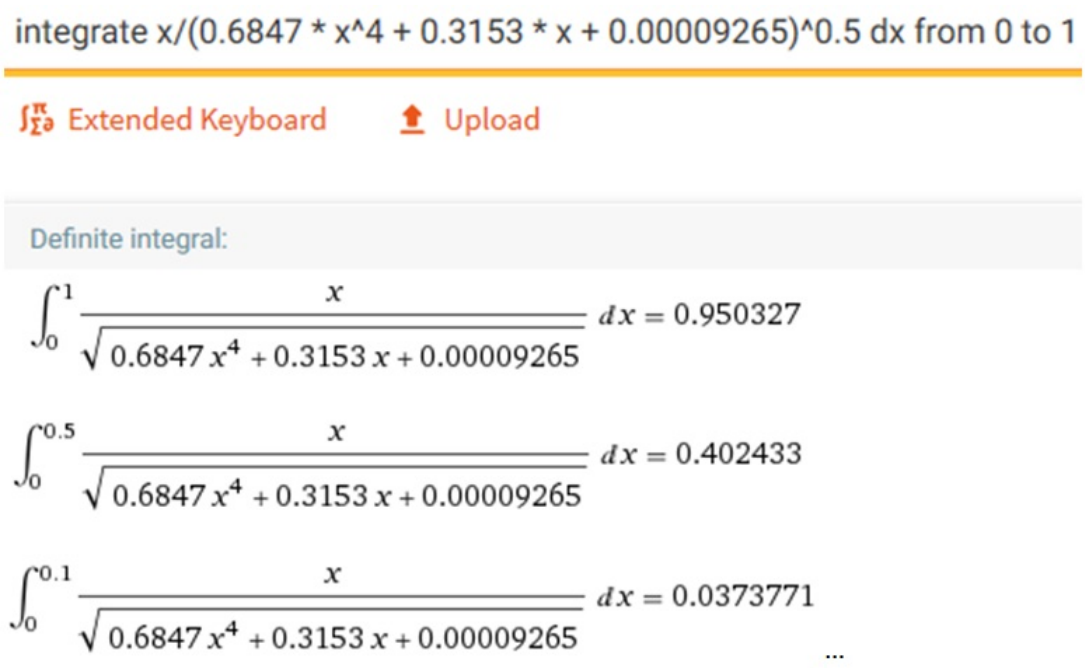


Abbildung 2: Berechnung des Integrals in Gleichung (14) mit einem Computeralgebrasystem.

Hier wenden wir das Integral an:

$$\int_0^x \frac{x}{\sqrt{\Omega_\Lambda \cdot x^4 + \Omega_m \cdot x + \Omega_r}} dx = \int_0^\tau d\tau = \tau \tag{14}$$

Erstellen Sie eine Wertetabelle für Paare $(x;\tau)$ dar. Stellen Sie den Radius in Meter abhängig von $\tilde{t} + 79\,t_P$ im Diagramm mit logarithmisch skalierten Achsen dar, verwenden Sie für den Radius dann die Variable r. Dabei werden $+79\,t_P$ addiert, damit der Zeitablauf der Raumausdehnung nahtlos an den Zeitablauf der dimensionalen Übergänge anschließt. Hinweis: Ermitteln Sie die Integrale mit einem Computeralgebrasystem (s. Abb. 2).

b. Stellen Sie den Zeitablauf des Radius während der dimensionalen Übergänge dar. Multiplizieren Sie dazu den Streckfaktor $k_{t_{D_{max}} \to t}$ mit dem Faktor der Distanzvergrößerung $Z_{t_{D_{max}} \to t}$ und mit der anfänglichen Kantenlänge $2L_P$.

c. Fügen Sie den Zeitablauf der Raumausdehnung (Abb. 17) mit dem Zeitablauf der dimensionalen Übergänge (Abb. 18) zusammen.

7 Lösungen

A1.1 Freien Fall:

a. Wir wenden die Gl. $v = g \cdot t$ des freien Falls an:

$$v = g \cdot t = -9,81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 5\mathrm{s} = 49,05\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{15}$$

b. Wir wenden die Gl. $F_G = m \cdot |g|$ für die Gewichtskraft in der Nähe des Erdbodens an:

$$F_G = m \cdot |g| = 2\,\text{kg} \cdot 9,81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 19,62\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2} = 19,62\,\text{N} \tag{16}$$

A1.2 Ableitung:

a. bis c. Wir wenden die Gl. $y'(t) = n \cdot t^{n-1}$ bei $y(t) = t^n$ für Ableitungen von Potenzfunktionen an:

$$f'(x) = 3 \cdot x^2 \tag{17}$$

$$a'(t) = 4 \cdot t^3 - 30 \cdot t^5 \tag{18}$$

$$z'(x) = (x^{-4})' = -4 \cdot x^{-5} = -4/x^5 \tag{19}$$

A1.3 Gravitationsgesetz:

a. Wir wenden Newtons Gravitationsgesetz an:

$$F_G = \frac{m^2 \cdot G}{r^2} = 1,67 \cdot 10^{-7}\,\text{N} \tag{20}$$

b. Wir wenden das Newtons Gravitationsgesetz an. Auch nutzen wir die Definition $G^* = F_G/m$ der Gravitationsfeldstärke, wobei m die Probemasse ist.:

$$G^* = \frac{m \cdot G}{r^2} = 1,67 \cdot 10^{-8}\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} \tag{21}$$

A1.4 Integral:

a. und b. Wir wenden die Gl. $\int_a^b x^k dx = \frac{1}{k+1} \cdot \left(b^{k+1} - a^{k+1}\right)$ für Integrale von Potenzfunktionen mit $k \neq -1$ an:

$$I = \int_1^3 x^3 dx = \frac{1}{4} \cdot (3^4 - 1^4) = 80/4 = 20 \tag{22}$$

$$I = \int_1^3 x^{-2} dx = -1 \cdot (3^{-1} - 1^{-1}) = 1 - 1/3 = 2/3 \tag{23}$$

A1.5 Potentielle Energie:

Wir wenden den Energieterm E_G zu Newtons Gravitationsgesetz an. (Wer mag, kann diesen durch Integrieren des Kraftterms herleiten):

$$E_G = -\frac{m_{Erde} \cdot m_{Mond} \cdot G}{r} = -\frac{5,97 \cdot 10^{24}\,\text{kg} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}\,\text{kg} \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}\cdot\text{s}^2}}{3,8 \cdot 10^8\,\text{m}} \tag{24}$$

$$E_G = -7,7 \cdot 10^{28}\,\text{J} \tag{25}$$

A1.6 Universelles Gasgesetz:

a. Wir wenden das universelle Gasgesetz $p \cdot V = N \cdot k_B \cdot T$ an und dividieren auf beiden Seiten der Gl. durch V:

$$p = N \cdot k_B \cdot T/V = 10^{24} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}\,\frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot \frac{300\,\text{K}}{4 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3} \tag{26}$$

$$p = 1\,035\,000\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3} = 1\,035\,000\ \mathrm{Pa} = 10,35\ \mathrm{bar} \tag{27}$$

A2.1 Äquivalenz von Masse und Energie:

Wir wenden die Relation $E = m \cdot c^2$ an:

$$E = m_e \cdot c^2 = 9,1 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg} \cdot \left(3 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 \tag{28}$$

$$E = 8,19 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{J} \tag{29}$$

A2.2 Differentialgleichung, DGL:

a. Wir vermuten eine Exponentialfunktion $f = a \cdot e^{b \cdot x}$. Auf diese Vermutung könnten wir beispielsweise mithilfe des Euler Verfahrens kommen. Wir testen die Vermutung und versuchen dabei die beiden Parameter a und b zu ermitteln. Dazu leiten wir mithilfe der Kettenregel $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ ab:

$$f'(x) = a \cdot b \cdot e^{b \cdot x} \tag{30}$$

Wir setzen die Ableitung in die DGL ein:

$$a \cdot b \cdot e^{b \cdot x} = 2 \cdot a \cdot e^{b \cdot x} \tag{31}$$

Wir dividieren auf beiden Seiten durch $a \cdot e^{b \cdot x}$ und erhalten:

$$b = 2 \tag{32}$$

Wir setzen in $f = a \cdot e^{b \cdot x}$ den Startwert $x = 0$ ein und erhalten:

$$5 = f(0) = a \cdot e^{b \cdot 0} = a \tag{33}$$

Wir erkennen insgesamt die Lösung:

$$f(x) = 5 \cdot e^{2 \cdot x} \tag{34}$$

b. Wir vermuten eine Sinusfunktion $f = a \cdot \sin(\omega \cdot t)$. Auf diese Vermutung könnten wir beispielsweise mithilfe des Euler Verfahrens kommen. Generell könnte eine Linearkombination von Sinus und Kosinus vorliegen, der Kosinus entfällt hier, weil der Startwert gleich null ist.

Wir testen die Vermutung und versuchen dabei die beiden Parameter a und ω zu ermitteln. Dazu leiten wir mithilfe der Kettenregel $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ ab:

$$f'(t) = a \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \tag{35}$$

$$f''(t) = -a \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \tag{36}$$

Wir setzen die Ableitung in die DGL ein:

$$-a \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) = -4 \cdot a \cdot \sin(\omega \cdot t) \tag{37}$$

Wir dividieren auf beiden Seiten durch $-f(t)$ und erhalten:

$$\omega^2 = 4 \tag{38}$$

Wir bestimmen die Lösungen:

$$\omega = 2 \quad \text{oder} \quad \omega = -2 \tag{39}$$

Bei der Lösung $\omega = -2$ wäre $f'(0) < 0$, daher kommt diese nicht in Frage. Somit bleibt $\omega = 2$. Wir setzen in $f'(t)$ den Startwert $t = 0$ ein und erhalten:

$$8 = f'(0) = a \cdot 2 \cdot \cos(\omega \cdot 0) = a \cdot 2 \quad \text{oder} \quad a = 4 \tag{40}$$

Wir erkennen insgesamt die Lösung:

$$f(t) = 4 \cdot \sin(2 \cdot t) \tag{41}$$

A2.3 Wellen:

a. Wir wenden die Relation $c = \lambda/T$ an und lösen nach T auf:

$$T = \lambda/c = \frac{500 \cdot 10^{-9}\ \text{m}}{3 \cdot 10^{8}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1,7 \cdot 10^{-15}\ \text{s} \tag{42}$$

Die Frequenz ist der Kehrwert der Periodendauer:

$$f = 1/T = \frac{1}{1,7 \cdot 10^{-15}\ \text{s}} = 5,9 \cdot 10^{14}\ 1/\text{s} = 5,9 \cdot 10^{14}\ \text{Hz} \tag{43}$$

b. Wir wenden die Beugungsformel $\sin\alpha = \frac{n \cdot \lambda}{b}$ an. Dabei setzen wir für n die Beugungsordnung 1 ein:

$$\sin\alpha = \frac{500\ \text{nm}}{2000\ \text{nm}} = \frac{1}{4} \tag{44}$$

Wir wenden auf beiden Seiten die Umkehrfunktion des Sinus, den Arcussinus, an:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{4}\right) = 14,5^{o} \tag{45}$$

c. Wir wenden den Energieterm $E = h \cdot f$ an:

$$E = h \cdot f = 6,6 \cdot 10^{-34}\ \text{Js} \cdot 5,9 \cdot 10^{14}\ \text{Hz} = 3,9 \cdot 10^{-19}\ \text{J} \tag{46}$$

d. Wir wenden den Impulsterm $p = h/\lambda$ an:

$$p = h/\lambda = 6,6 \cdot 10^{-34}\ \text{Js}/500 \cdot 10^{-9}\ \text{m} = 1,3 \cdot 10^{-27}\ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \tag{47}$$

A2.4 Erwartungswert: Ermitteln Sie die Erwartungswerte.

a. Wir ermitteln für jedes mögliche Würfel-Ergebnis x den Wert x^3, multiplizieren mit der Wahrscheinlichkeit 1/6 und addieren.

$$\langle x^3 \rangle = (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3)/6 = 73,5 \tag{48}$$

b. Wir verwenden die Definition:

$$\langle x^3 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x^3 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx} \tag{49}$$

Wir zerlegen das Integral im Zähler in eine Integral von $-\infty$ bis 0 und eines von 0 bis ∞:

$$\langle x^3 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{0} f(x) \cdot x^3 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx} + \frac{\int_{0}^{\infty} f(x) \cdot x^3 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx} \tag{50}$$

Die beiden Summanden haben gleichen Betrag und umgekehrtes Vorzeichen. Denn für jede Zahl x ist $f(x) = f(-x)$. Daher ist $f(x) \cdot x^3 = -f(-x) \cdot (-x)^3$. Somit ist:

$$\langle x^3 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{0} f(x) \cdot x^3 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) x^3 dx} - \frac{\int_{-\infty}^{0} f(x) \cdot x^3 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx} = 0 \tag{51}$$

c. Wir verwenden die Definition:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx} \tag{52}$$

Wir identifizieren das Integral im Zähler mit I_2 und das Integral im Nenner mit I_0:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{I_2}{I_0} = \frac{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma^3}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} = \sigma^2 \tag{53}$$

A2.5 Heisenbergs Unbestimmtheitsrelation:

Wir wenden die Unbestimmtheitsrelation $\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$ an und dividieren auf beiden Seiten der Ungleichung durch Δx:

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{2 \cdot \Delta x} = \frac{1,05 \cdot 10^{-34}\ \text{Js}}{2 \cdot 7 \cdot 10^{-15}\ \text{m}} = 7,5 \cdot 10^{-21}\ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \tag{54}$$

A2.6 Materiewellen:

a. Beim Beschleunigen wird die elektrische Energie $E_{el} = U \cdot e$ in Bewegungsenergie $E_{kin} = \frac{m}{2} \cdot v^2$ umgewandelt. Wir setzen beide Terme gleich:

$$U \cdot e = \frac{m}{2} \cdot v^2 \tag{55}$$

Wir lösen nach v auf, indem wir auf beiden Seiten der Gleichung mit $\frac{2}{m}$ multiplizieren und danach die Wurzel anwenden:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot U \cdot e}{m}} \tag{56}$$

Wir setzen die Größen ein:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 5000\ \text{V} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}}{9,1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} = 42 \cdot 10^{6}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{57}$$

b. Der Impuls ist das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit:

$$p = m \cdot v = 9,1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 42 \cdot 10^{6}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3,8 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \tag{58}$$

c. Wir wenden die Relation $p = \frac{h}{\lambda}$ an. Dazu lösen wir nach λ auf, indem wir auf beiden Seiten der Relation mit $\frac{\lambda}{p}$ multiplizieren. So erhalten wir:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}}{3,8 \cdot 10^{-23}\ \frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s}}} = 1,7 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m} = 17\ \mathrm{pm} \tag{59}$$

A2.7 Elektronengas:

a. Wir wenden die Relation $|p| = \frac{h}{\lambda}$ an:

$$|p| = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}}{1 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}} = 6,6 \cdot 10^{-24}\ \frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s}} \tag{60}$$

b. Wir wenden den Term $E_{kin} = \frac{m}{2} \cdot v^2$ an. Dabei setzen wir $v = p/m$ ein:

$$E_{kin} = \frac{m}{2} \cdot v^2 = \frac{|p|^2}{2 \cdot m} \tag{61}$$

Wir setzen die Größen ein:

$$E_{kin} = \frac{\left(6,6 \cdot 10^{-24}\ \frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}} = 2,4 \cdot 10^{-17}\ \mathrm{J} \tag{62}$$

c. Wir nutzen die Relation $n = \frac{2}{\lambda^3}$:

$$n = \frac{2}{(10^{-10}\ \mathrm{m})^3} = 2 \cdot 10^{30}\ \mathrm{m^{-3}} \tag{63}$$

d. Für den Druck p nutzen wir die Relation $p = \frac{2}{3} \cdot n \cdot E_1$ ((Carmesin, 2020, Gl. 1.40)). Dabei ist die Energie eines Teilchens gleich der obigen kinetischen Energie. Somit gilt:

$$p = \frac{2}{3} \cdot n \cdot E_{kin} \tag{64}$$

Wir setzen die Größen ein:

$$p = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 10^{30}\ \mathrm{m^{-3}} \cdot 2,4 \cdot 10^{-17}\ \mathrm{J} = 3,2 \cdot 10^{13}\ \mathrm{Pa} \tag{65}$$

A2.8 Druck in der Sonne:

a. Wir wenden die Relation $\rho = \frac{M}{4\pi \cdot R^3/3}$ an:

$$\rho_\odot = \frac{2 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}}{4\pi \cdot (0,7 \cdot 10^9\ \mathrm{m})^3\ /3} = 1392\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} \tag{66}$$

b. Wir wenden den Term $p(0) = \frac{G \cdot \rho \cdot M}{2R}$ an ((Carmesin, 2020, Gl. 2.90)):

$$p(0) = \frac{6,67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg \cdot s^2}} \cdot 1392\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} \cdot 2 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}}{2 \cdot 0,7 \cdot 10^9\ \mathrm{m}} = 1,3 \cdot 10^{14}\ \mathrm{Pa} \tag{67}$$

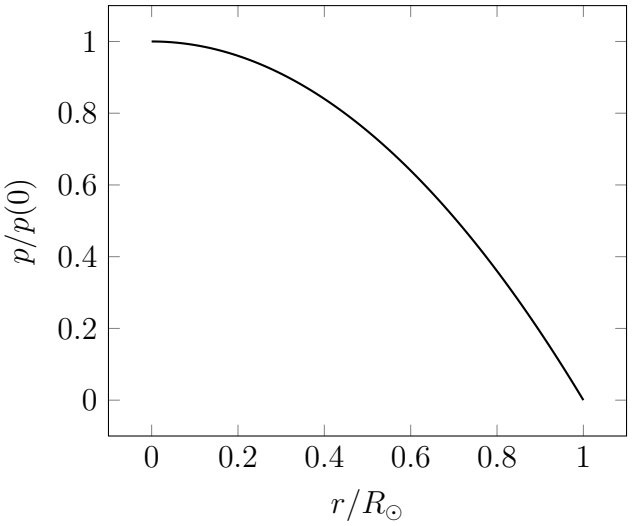


Abbildung 3: Druckverlauf in der Sonne.

c. Wir wenden den Term $p(r) = p(0) - \frac{G \cdot \rho \cdot M}{2R_\odot^3} \cdot r^2$ an. Zur Vereinfachung klammern wir $p(0)$ aus:

$$p(r) = p(0) - \frac{G \cdot \rho_\odot \cdot M_\odot}{2R_\odot^3} \cdot r^2 = p(0) - \frac{G \cdot \rho_\odot \cdot M_\odot}{2R_\odot} \cdot \frac{r^2}{R_\odot^2} = p(0) - p(0) \cdot \frac{r^2}{R_\odot^2} = p(0) \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R_\odot^2}\right) \quad (68)$$

A3.1 Fluchtgeschwindigkeit und Schwarzschildradius der Sonne:

a. Wir wenden die Relation $v_F = \sqrt{\frac{2G \cdot M}{R}}$ an:

$$v_F = \sqrt{\frac{2G \cdot M_\odot}{R_\odot}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg \cdot s}^2} \cdot 2 \cdot 10^{30} \ \mathrm{kg}}{0,7 \cdot 10^9 \ \mathrm{m}}} = 617 \ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \quad (69)$$

b. Wir wenden den Term $R_S = \frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2}$ an:

$$R_S = \frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2} = \frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg \cdot s}^2} \cdot 2 \cdot 10^{30} \ \mathrm{kg}}{\left(3 \cdot 10^8 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} = 2 \ 964 \ \mathrm{m} \quad (70)$$

A3.2 Schnelle Myonen:

a. Wir wenden die Relation $t_{rel} = t_{eigen} / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ an:

$$\tau_{rel} = \tau / \sqrt{1 - \frac{0,99^2 \cdot c^2}{c^2}} = 1,52 \cdot 10^{-6} \ \mathrm{s} / \sqrt{1 - 0,99^2} = 10,77 \cdot 10^{-6} \ \mathrm{s} \quad (71)$$

b. Wir wenden den Term $m_{rel} = m_{eigen} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ an:

$$m_{rel} = 1,88 \cdot 10^{-28} \ \mathrm{kg} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 0,99^2}} = 13,3 \cdot 10^{-28} \ \mathrm{kg} \quad (72)$$

c. Wir wenden den Term $E = m_{rel} \cdot c^2$ an:

$$E = m_{rel} \cdot c^2 = 13,3 \cdot 10^{-28}\ \text{kg} \cdot \left(3 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 1,2 \cdot 10^{-10}\ \text{J} \tag{73}$$

d. Wir wenden den Term $E_{kin} = E - m_{eigen} \cdot c^2$ an:

$$E_{kin} = E - m_{eigen} \cdot c^2 = 1,2 \cdot 10^{-10}\ \text{J} - 1,88 \cdot 10^{-28}\ \text{kg} \cdot \left(3 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 1,03 \cdot 10^{-10}\ \text{J} \tag{74}$$

d. Wir wenden den Term $p_{rel} = m_{rel} \cdot v$ an:

$$p_{rel} = m_{rel} \cdot v = 13,3 \cdot 10^{-28}\ \text{kg} \cdot 0,99 \cdot 3 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3,95 \cdot 10^{-19}\ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \tag{75}$$

A3.3 Expedition zu einem schwarzen Loch:

a. Wir wenden den Term $R_S = \frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2}$ an:

$$R_S = \frac{2 \cdot G \cdot 10 \cdot M_\odot}{c^2} = \frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \cdot 2 \cdot 10^{31}\ \text{kg}}{\left(3 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 29,64\ \text{km} \tag{76}$$

b. Wir wenden den Term $r = \frac{U}{2\pi}$ an:

$$r = \frac{U}{2\pi} = \frac{400km}{2\pi} = 63,66\ \text{km} = 2,15 \cdot R_S \tag{77}$$

c. Wir wenden den Term $L = \int_{R_S}^{2,15R_S} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{R_S}{r}}} dr$ an. Das Integral lösen wir am einfachsten mit dem Computer (s. (Carmesin, 2020, S. 23) oder ein Computeralgebrasystem, z. B. bei Wolfram Alpha):

$$L = \int_{R_S}^{2,15R_S} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{R_S}{r}}} dr = 2,5 \cdot R_S \tag{78}$$

d. Wir wenden den Term $ds_t = dt \cdot \sqrt{1-\frac{R_S}{r}}$ an:

$$\Delta t_{eigen}(r) = \Delta t \cdot \sqrt{1-\frac{R_S}{r}} \tag{79}$$

$$\Delta t_{eigen}(2,15R_S) = 100\ \text{h} \cdot \sqrt{1-\frac{1}{2,15}} = 73,14\ \text{h} \tag{80}$$

e. Wir wenden den Term $E(r) = E_\infty \cdot \sqrt{1-\frac{R_S}{r}}$ an:

$$E(2,14 \cdot R_S) = 10^{21}\ \text{J} \cdot \sqrt{1-\frac{1}{2,14}} = 0,7314 \cdot 10^{21}\ \text{J} \tag{81}$$

f. Wir wenden den Term $T_H = \frac{\hbar \cdot c}{4\pi \cdot R_S \cdot k_B}$ an:

$$T_H = \frac{\hbar \cdot c}{4\pi \cdot R_S \cdot k_B} = \frac{1,05 \cdot 10^{-34}\ \text{Js} \cdot 3 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4\pi \cdot 29\,640\ \text{m} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{J}}{\text{K}}} = 6,13 \cdot 10^{-9}\ \text{K} \tag{82}$$

A4.1 Planck - Länge und Lichthorizont:

a. Wir wenden die Relation $L_P = \sqrt{\frac{\hbar \cdot G}{c^3}}$ an:

$$L_P = \sqrt{\frac{1,055 \cdot 10^{-34}\ \text{Js} \cdot 6,674 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}}{\left(2,998 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^3}} = 1,616 \cdot 10^{-35}\ \text{m} \tag{83}$$

b. Wir wenden die Relation $r_{lh,Lichtweg} = t_0 \cdot c$ an:

$$r_{lh,Lichtweg} = t_0 \cdot c = 13,8\ \text{Mrd. Lichtjahre} = 1,31 \cdot 10^{26}\ \text{m} = 8,13 \cdot 10^{60} \cdot L_P \tag{84}$$

A4.2 Raumausdehnung und Rotverschiebung:

a. Wir wenden die Relation $z = \frac{\lambda_{beobachtet} - \lambda_{ausgesendet}}{\lambda_{ausgesendet}}$ an. Wir vermuten, dass die längste Wellenlänge der H_α - Strahlung entspricht:

$$z = \frac{3215,9 - 656,3}{656,3} = 3,90004 \tag{85}$$

Wir vermuten, dass die zweitlängste Wellenlänge der H_β - Strahlung entspricht:

$$z = \frac{2381,9 - 486,1}{486,1} = 3,90002 \tag{86}$$

Wir vermuten, dass die kürzeste Wellenlänge der H_γ - Strahlung entspricht:

$$z = \frac{2126,6 - 434}{434} = 3,9 \tag{87}$$

Die präzise Übereinstimmung der drei ermittelten Rotverschiebungen deuten wir als klaren Hinweis darauf, dass die drei beobachteten Strahlungen von Wasserstoff auf dem Quasar ausgesendet wurden, und zwar bei den Wellenlängen λ_{H_α}, λ_{H_β} und λ_{H_γ}.

b. Wir wenden die Relationen $E = h \cdot f$ und $f = \frac{c}{\lambda}$ an. Dazu setzen wir für f ein:

$$E = \frac{h \cdot c}{\lambda} \tag{88}$$

Wir setzen in den Quotienten ein:

$$\frac{E'}{E} = \frac{\lambda}{\lambda'} \tag{89}$$

Wir drücken λ' durch z aus:

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = \lambda + z \cdot \lambda = \lambda \cdot (z + 1) \tag{90}$$

Wir setzen diese Relation in Gl. (89) ein:

$$\frac{E'}{E} = \frac{\lambda}{\lambda \cdot (z + 1)} = \frac{1}{z + 1} \tag{91}$$

A5.1 Zeitverlauf der Raumausdehnung:

Lösung:

a. Wir schreiben die Ableitung im Leibniz - Kalkül, $\dot{a} = \frac{da}{dt}$:

$$\frac{\left(\frac{da}{dt}\right)^2}{a^2} = \frac{8\pi \cdot G}{3} \cdot (\rho_r + \rho_m + \rho_v) \tag{92}$$

Wir erweitern den Bruch mit $1/a_0$:

$$\frac{\left(\frac{da/a_0}{dt}\right)^2}{(a/a_0)^2} = \frac{8\pi \cdot G}{3} \cdot (\rho_r + \rho_m + \rho_v) \tag{93}$$

Wir wenden die Definition $x = a/a_0$ an:

$$\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{x^2} = \frac{8\pi \cdot G}{3} \cdot (\rho_r + \rho_m + \rho_v) \tag{94}$$

b. Wir wenden die Gl. (4) an:

$$\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{x^2} = \frac{8\pi \cdot G}{3} \cdot \rho_{cr,t_0} \cdot x^{-4} \cdot (\Omega_\Lambda \cdot x^4 + \Omega_m \cdot x + \Omega_r) \tag{95}$$

c. Wir wenden die Gl. (5) an:

$$\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{x^2} = H_0^2 \cdot x^{-4} \cdot (\Omega_\Lambda \cdot x^4 + \Omega_m \cdot x + \Omega_r) \tag{96}$$

d. Wir multiplizieren Gl. (96) auf beiden Seiten mit $x^2 \cdot dt^2$:

$$dx^2 = dt^2 \cdot H_0^2 \cdot x^{-2} \cdot (\Omega_\Lambda \cdot x^4 + \Omega_m \cdot x + \Omega_r) \tag{97}$$

Wir ziehen die Wurzel:

$$dx = dt \cdot H_0 \cdot x^{-1} \cdot \sqrt{\Omega_\Lambda \cdot x^4 + \Omega_m \cdot x + \Omega_r} \tag{98}$$

Wir wenden $dt \cdot H_0 = d\tau$ an:

$$dx = d\tau \cdot x^{-1} \cdot \sqrt{\Omega_\Lambda \cdot x^4 + \Omega_m \cdot x + \Omega_r} \tag{99}$$

e. Wir erstellen die Tabellenkalkulation:

f. Wir verwenden die Hubble - Konstante aus der Tabelle und setzen 1 Mpc $= 3,0856776 \cdot 10^{19}$ km ein.

$$H_0 = 67,36 \, \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}} = 2,18299 \cdot 10^{-18} \, \frac{1}{\text{s}} \tag{100}$$

Wir bilden den Kehrwert:

$$\frac{1}{H_0} = 4,58088 \cdot 10^{17} \text{ s} = 14,5163 \cdot 10^9 \text{ Jahre} \tag{101}$$

g. Wir multiplizieren die Dauer 0,951 mit der Zeiteinheit $1/H_0$:

$$0,951 \cdot \frac{1}{H_0} == 0,951 \cdot 14,5163 \text{ Mrd. Jahre} = 13,8 \text{ Mrd. Jahre} \tag{102}$$

	A	B	C
1			
2	Omega_r	0,00009265	
3	Omega_m	0,3153	
4	Omega_v	0,6847	
5	dtau	-0,001	
6			
7	tau	x	dx
8	0	1	=(Omega_v*B8^4+Omega_m*B8+Omega_r)^0,5/B8
9	=A8+dtau	=B8+C8*dtau	=(Omega_v*B9^4+Omega_m*B9+Omega_r)^0,5/B9
10	=A9+dtau	=B9+C9*dtau	=(Omega_v*B10^4+Omega_m*B10+Omega_r)^0,5/B10
11	=A10+dtau	=B10+C10*dtau	=(Omega_v*B11^4+Omega_m*B11+Omega_r)^0,5/B11
12	=A11+dtau	=B11+C11*dtau	=(Omega_v*B12^4+Omega_m*B12+Omega_r)^0,5/B12
13	=A12+dtau	=B12+C12*dtau	=(Omega_v*B13^4+Omega_m*B13+Omega_r)^0,5/B13
14	=A13+dtau	=B13+C13*dtau	=(Omega_v*B14^4+Omega_m*B14+Omega_r)^0,5/B14
15	=A14+dtau	=B14+C14*dtau	=(Omega_v*B15^4+Omega_m*B15+Omega_r)^0,5/B15

Abbildung 4: Formeln in der Tabellenkalkulation.

	A	B	C
1			
2	Omega_r	9,265E-05	
3	Omega_m	0,3153	
4	Omega_v	0,6847	
5	dtau	-0,001	
6			
7	tau	x	dx
8	0	1	1,000046324
9	-0,001	0,99899995	0,999519728
10	-0,002	0,99800043	0,998994134
11	-0,003	0,99700144	0,998469542
12	-0,004	0,99600297	0,997945952
13	-0,005	0,99500502	0,997423364
14	-0,006	0,9940076	0,99690178
15	-0,007	0,9930107	0,9963812

Abbildung 5: Tabellenkalkulation.

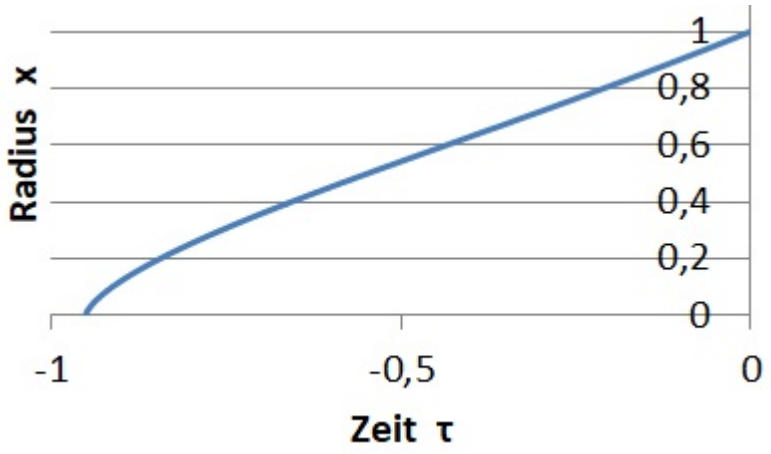


Abbildung 6: Graph zur Tabellenkalkulation.

A6.1 Summen und Reihen:

a. Wir berechnen:

$$\Sigma_{j=1}^{j=4} 0,1^j = 0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 = 0,1111 \tag{103}$$

b. Wir berechnen:

$$\Sigma_{j=1}^{\infty} 0,1^j = 0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + ... = 0,1111... = 0,\bar{1} = \frac{1}{9} \tag{104}$$

c. Wir berechnen:

$$\Sigma_{j=1}^{j=3} 0,5^j = 0,5 + 0,25 + 0,125 = 1 - 0,125 = 1 - 0,5^3 \tag{105}$$

d. Wir berechnen:

$$\Sigma_{j=1}^{j=n} 0,5^j = 0,5 + 0,25 + 0,125 + ... + 0,5^n = 1 - 0,5^n \tag{106}$$

e. Wir berechnen:

$$\Sigma_{j=1}^{\infty} 0,5^j = \lim_{n\to\infty} \Sigma_{j=1}^{j=n} 0,5^j = \lim_{n\to\infty} 1 - 0,5^n = 1 \tag{107}$$

A6.2 Komplexe Zahlen:

a. Wir berechnen:

$$z = (3 + 2i) + (4 - i) = 3 + 4 + i \cdot (2 - 1) = 7 + i \tag{108}$$

b. Wir berechnen:

$$z = (3 + 2i)^2 = 9 + 2 \cdot 3 \cdot 2i + 4 \cdot i^2 = 9 + 12i - 4 = 5 + 12i \tag{109}$$

c. Wir stellen z als Summe von realem Teil und imaginärem Teil dar, $z = a + i \cdot b$ und wir ermitteln die beiden reellen Zahlen a und b.

$$z^2 = 3,75 + 2i = a^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot i - b^2 = a^2 - b^2 + i \cdot (2ab) \tag{110}$$

Der reale Teil und der imaginäre Teil müssen gleich sein:

$$3,75 = a^2 - b^2 \quad \text{und} \quad 2 = 2ab \tag{111}$$

Wir lösen die zweite Gleichung nach b auf und setzen in die erste Gleichung ein:

$$3,75 = a^2 - 1/a^2 \quad \text{und} \quad b = 1/a \tag{112}$$

Da 3,75 $= 4 - 1/4$ ist, muss $a = 2$ oder $a = -2$ sein. Die Wurzel ist also:

$$z = 2 + i/2 \quad \text{oder} \quad z = -2 - i/2 \tag{113}$$

d. Wir berechnen:

$$z = \sqrt[3]{8 \cdot e^{i \cdot \pi/4}} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{e^{i \cdot \pi/4}} = 2 \cdot \sqrt[3]{e^{i \cdot \pi/4}} = 2 \cdot [e^{i \cdot \pi/4}]^{1/3} \tag{114}$$

Eine Lösung z_1 ergibt sich aus dem Potenzgesetz $[a^b]^c = a^{b \cdot c}$:

$$z_1 = 2 \cdot e^{i \cdot \pi/12} \tag{115}$$

Da $b = [e^{i\pi/3}]^3 = 1$ ist, können wir z_1 mit b multiplizieren und erhalten eine zweite Lösung:

$$z_2 = 2 \cdot e^{i \cdot \pi/12} \cdot e^{i \cdot \pi/3} = 2 \cdot e^{i \cdot \pi \cdot 5/12} \tag{116}$$

Da auch $c = [e^{i\pi \cdot 2/3}]^3 = 1$ ist, können wir z_1 mit c multiplizieren und erhalten eine dritte Lösung:

$$z_3 = 2 \cdot e^{i \cdot \pi/12} \cdot e^{i \cdot \pi \cdot 2/3} = 2 \cdot e^{i \cdot \pi \cdot 9/12} = 2 \cdot e^{i \cdot \pi \cdot 3/4} \tag{117}$$

A6.3 Eigenwert:

a. Wir berechnen:

$$\hat{E}\psi = i \cdot \hbar \cdot \partial_t \psi = i \cdot \hbar \cdot (-i) \cdot \omega \cdot \psi = \hbar \cdot \omega \cdot \psi \tag{118}$$

Wir identifizieren den Eigenwert $\hbar \cdot \omega$.

b. Wir berechnen:

$$\hat{p}\psi = -i \cdot \hbar \cdot \partial_x \psi = -i \cdot \hbar \cdot i \cdot k \cdot \psi + i \cdot \hbar \cdot \frac{x}{\sigma^2} \cdot \psi \tag{119}$$

Das Ergebnis ist nicht eine Zahl multipliziert mit ψ, denn der Faktor $\frac{x}{\sigma^2}$ stellt eine Funktion von x dar. Daher ist ψ keine Eigenfunktion des Impulsoperators.

A6.4 Erwartungswert:

a. Wir berechnen:

$$\langle p \rangle = -\hbar^2 \cdot \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi \partial_x (-x) \cdot \psi dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dx} \tag{120}$$

Wir leiten weiter ab:

$$\langle p \rangle = -\hbar^2 \cdot \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi \cdot x^2 \cdot \psi dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dx} + \hbar^2 \cdot \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dx} \tag{121}$$

Wer berechnen die Integrale, z. B. mit einem Computeralgebrasystem:

$$\langle p \rangle = -\hbar^2 \cdot \frac{1}{2} + \hbar^2 = \hbar^2 \cdot \frac{1}{2} \tag{122}$$

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Da	3				
3		Db	7				
4		drho	0,001				
5							
6	rho	E_Da	E_Db	E_Da_cl_G	E_Da_Q	E_Db_cl_G	E_Db_Q
7	0,1	=D7+E7	=F7+G7	=-1/2*(2*A7)^((Da^2-Da)/(2*Da+2))	=(2*A7)^((3*Da^2-Da-2)/(4*Da+4))*(Da*(Da-2)/2)^0,5	=-1/2*(2*A7)^((Db^2-Db)/(2*Db+2))	=(2*A7)^((3*Db^2-Db-2)/(4*Db+4))*(Db*(Db-2)/2)^0,5
8	=A7+drho	=D8+E8	=F8+G8	=-1/2*(2*A8)^((Da^2-Da)/(2*Da+2))	=(2*A8)^((3*Da^2-Da-2)/(4*Da+4))*(Da*(Da-2)/2)^0,5	=-1/2*(2*A8)^((Db^2-Db)/(2*Db+2))	=(2*A8)^((3*Db^2-Db-2)/(4*Db+4))*(Db*(Db-2)/2)^0,5
9	=A8+drho	=D9+E9	=F9+G9	=-1/2*(2*A9)^((Da^2-Da)/(2*Da+2))	=(2*A9)^((3*Da^2-Da-2)/(4*Da+4))*(Da*(Da-2)/2)^0,5	=-1/2*(2*A9)^((Db^2-Db)/(2*Db+2))	=(2*A9)^((3*Db^2-Db-2)/(4*Db+4))*(Db*(Db-2)/2)^0,5
10	=A9+drho	=D10+E10	=F10+G10	=-1/2*(2*A10)^((Da^2-Da)/(2*Da+2))	=(2*A10)^((3*Da^2-Da-2)/(4*Da+4))*(Da*(Da-2)/2)^0,5	=-1/2*(2*A10)^((Db^2-Db)/(2*Db+2))	=(2*A10)^((3*Db^2-Db-2)/(4*Db+4))*(Db*(Db-2)/2)^0,5
11	=A10+drho	=D11+E11	=F11+G11	=-1/2*(2*A11)^((Da^2-Da)/(2*Da+2))	=(2*A11)^((3*Da^2-Da-2)/(4*Da+4))*(Da*(Da-2)/2)^0,5	=-1/2*(2*A11)^((Db^2-Db)/(2*Db+2))	=(2*A11)^((3*Db^2-Db-2)/(4*Db+4))*(Db*(Db-2)/2)^0,5
12	=A11+drho	=D12+E12	=F12+G12	=-1/2*(2*A12)^((Da^2-Da)/(2*Da+2))	=(2*A12)^((3*Da^2-Da-2)/(4*Da+4))*(Da*(Da-2)/2)^0,5	=-1/2*(2*A12)^((Db^2-Db)/(2*Db+2))	=(2*A12)^((3*Db^2-Db-2)/(4*Db+4))*(Db*(Db-2)/2)^0,5
13	=A12+drho	=D13+E13	=F13+G13	=-1/2*(2*A13)^((Da^2-Da)/(2*Da+2))	=(2*A13)^((3*Da^2-Da-2)/(4*Da+4))*(Da*(Da-2)/2)^0,5	=-1/2*(2*A13)^((Db^2-Db)/(2*Db+2))	=(2*A13)^((3*Db^2-Db-2)/(4*Db+4))*(Db*(Db-2)/2)^0,5
14	=A13+drho	=D14+E14	=F14+G14	=-1/2*(2*A14)^((Da^2-Da)/(2*Da+2))	=(2*A14)^((3*Da^2-Da-2)/(4*Da+4))*(Da*(Da-2)/2)^0,5	=-1/2*(2*A14)^((Db^2-Db)/(2*Db+2))	=(2*A14)^((3*Db^2-Db-2)/(4*Db+4))*(Db*(Db-2)/2)^0,5
15	=A14+drho	=D15+E15	=F15+G15	=-1/2*(2*A15)^((Da^2-Da)/(2*Da+2))	=(2*A15)^((3*Da^2-Da-2)/(4*Da+4))*(Da*(Da-2)/2)^0,5	=-1/2*(2*A15)^((Db^2-Db)/(2*Db+2))	=(2*A15)^((3*Db^2-Db-2)/(4*Db+4))*(Db*(Db-2)/2)^0,5

Abbildung 7: Formeln in der Tabellenkalkulation.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Da	3				
3		Db	7				
4		drho	0,001				
5							
6	rho	E_Da	E_Db	E_Da_cl_G	E_Da_Q	E_Db_cl_G	E_Db_Q
7	0,1	-0,01557897	-0,00326659	-0,14953488	0,13395591	-0,00731432	0,00404772
8	0,101	-0,01485375	-0,00328268	-0,15065499	0,13580125	-0,00750788	0,0042252
9	0,102	-0,01411889	-0,003296	-0,15177234	0,13765345	-0,00770458	0,00440858
10	0,103	-0,01337447	-0,00330642	-0,15288695	0,13951248	-0,00790445	0,00459803
11	0,104	-0,01262057	-0,00331383	-0,15399886	0,14137829	-0,00810749	0,00479366
12	0,105	-0,01185726	-0,0033181	-0,1551081	0,14325083	-0,00831372	0,00499562
13	0,106	-0,01108462	-0,00331912	-0,1562147	0,14513008	-0,00852318	0,00520406
14	0,107	-0,01030271	-0,00331675	-0,15731869	0,14701599	-0,00873587	0,00541912
15	0,108	-0,0095116	-0,00331088	-0,15842011	0,14890852	-0,00895182	0,00564093
16	0,109	-0,00871136	-0,00330138	-0,15951898	0,15080763	-0,00917103	0,00586966
17	0,11	-0,00790205	-0,00328811	-0,16061534	0,15271328	-0,00939355	0,00610544
18	0,111	-0,00708375	-0,00327094	-0,1617092	0,15462545	-0,00961937	0,00634843
19	0,112	-0,00625652	-0,00324974	-0,16280061	0,15654408	-0,00984852	0,00659878
20	0,113	-0,00542042	-0,00322438	-0,16388958	0,15846915	-0,01008102	0,00685665
21	0,114	-0,00457552	-0,00319471	-0,16497614	0,16040062	-0,01031689	0,00712218
22	0,115	-0,00372187	-0,0031606	-0,16606032	0,16233845	-0,01055615	0,00739555
23	0,116	-0,00285954	-0,00312191	-0,16714215	0,16428262	-0,01079881	0,0076769

Abbildung 8: Tabellenkalkulation.

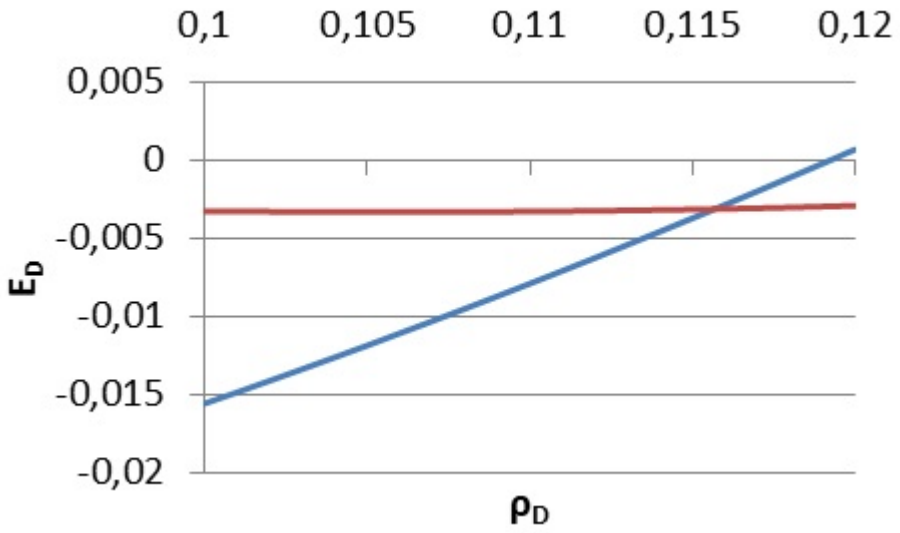


Abbildung 9: Graph zur Tabellenkalkulation: Der Schnittpunkt markiert den dimensionalen Übergang zwischen $D = 3$ und $D = 7$.

A6.5 Minimierung der Energie E_D:

a. Wir erstellen die Tabellenkalkulation:

b. Der Schnittpunkt in obiger Abbildung entspricht der kritischen Dichte $\tilde{\rho}_{D=3,c}$. Wir lesen ab: $\tilde{\rho}_{D=3,c} \approx 0,115$.

c. Wir stellen in der Tabellenkalkulation $Da = 7$ und $Db = 8$ ein. Das Ergebnis zeigt Abb. (10). Der Schnittpunkt entspricht der kritischen Dichte $\tilde{\rho}_{D=7,c}$. Wir lesen ab: $\tilde{\rho}_{D=7,c} \approx 0,128$.

A6.6 Distanzvergrößerung:

a. Wir berechnen:

$$Z_{D_{max}\to D=3} = \frac{q_{D_{max}\to t_0}}{k_{D_{max}\to t_0}} = \frac{2,56\cdot 10^{61}}{2,96\cdot 10^{31}} = 8,65\cdot 10^{29} \tag{123}$$

b. Wir berechnen ((Carmesin, 2020, Gl. 6.108)):

$$D_{max} = \frac{3}{\ln 2}\cdot \ln(Z_{D_{max}\to D=3}) + 3 = \frac{3}{\ln 2}\cdot \ln(8,65\cdot 10^{29}) + 3 = 301,3 \approx 301 \tag{124}$$

c. Bei D_{max} ist $n_{D=301} = 2$. Daher ist N:

$$N = 2^{301} = 4\cdot 10^{90} \tag{125}$$

d. Bei einer kubischen Anordnung der N Regionen erhalten wir:

$$n_{D=3} = \sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{4}\cdot 10^{30} \tag{126}$$

A6.7 Zeitablauf:

a. Wir erstellen die Tabellenkalkulation (Tab. 11, 12 und Abb. 13). Dabei nimmt die Dichte $\tilde{\rho}_D$ aufgrund der Dynamik stetig ab, immer wenn eine kritische Dichte $\tilde{\rho}_{D,c}$ erreicht ist, wird die Dimension entsprechend geändert.

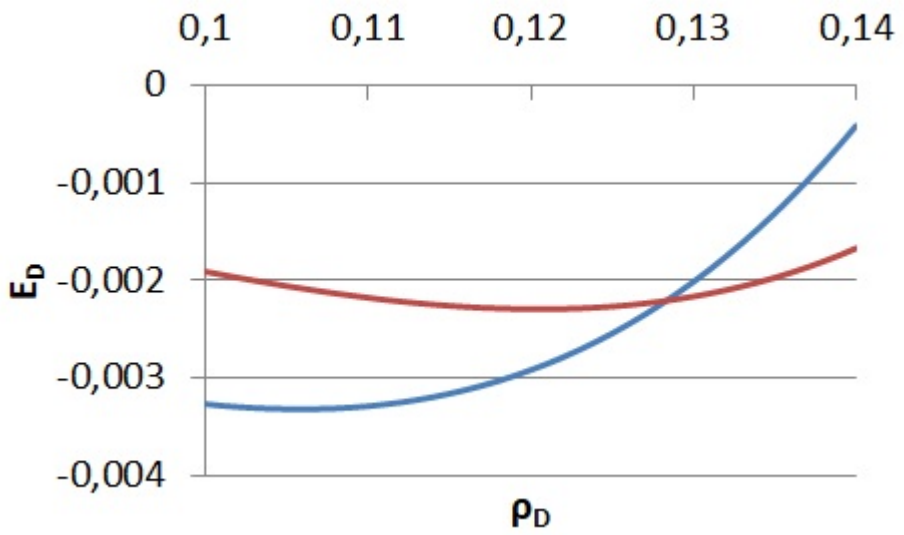


Abbildung 10: Graph zur Tabellenkalkulation: Der Schnittpunkt markiert den dimensionalen Übergang zwischen $D = 7$ und $D = 8$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		dt	0,01						
3									
4	t	Z	rho	D	E_D	rho_punkt	drho	E_D_cl_G	E_D_Q
5	0	=2^((301-D5)/D5)	0,45915	301	=H5+I5	=-1*(D5+1)*C5*(-2*E5*(2*C5)^((2/(D5+1))))^0,5	=F5*dt	=-1/2*(2*C5)^((D5^2-D5)/(2*D5+2))	=(2*C5)^((3*D5^2-D5-2)/(4*D5+4))*(D5*(D5-2)/2)^0,5
6	=A5+dt	=2^((301-D6)/D6)	=C5+G5	=D5	=H6+I6	=-1*(D6+1)*C6*(-2*E6*(2*C6)^((2/(D6+1))))^0,5	=F6*dt	=-1/2*(2*C6)^((D6^2-D6)/(2*D6+2))	=(2*C6)^((3*D6^2-D6-2)/(4*D6+4))*(D6*(D6-2)/2)^0,5
7	=A6+dt	=2^((301-D7)/D7)	=C6+G6	280	=H7+I7	=-1*(D7+1)*C7*(-2*E7*(2*C7)^((2/(D7+1))))^0,5	=F7*dt	=-1/2*(2*C7)^((D7^2-D7)/(2*D7+2))	=(2*C7)^((3*D7^2-D7-2)/(4*D7+4))*(D7*(D7-2)/2)^0,5
8	=A7+dt	=2^((301-D8)/D8)	=C7+G7	=D7	=H8+I8	=-1*(D8+1)*C8*(-2*E8*(2*C8)^((2/(D8+1))))^0,5	=F8*dt	=-1/2*(2*C8)^((D8^2-D8)/(2*D8+2))	=(2*C8)^((3*D8^2-D8-2)/(4*D8+4))*(D8*(D8-2)/2)^0,5
9	=A8+dt	=2^((301-D9)/D9)	=C8+G8	260	=H9+I9	=-1*(D9+1)*C9*(-2*E9*(2*C9)^((2/(D9+1))))^0,5	=F9*dt	=-1/2*(2*C9)^((D9^2-D9)/(2*D9+2))	=(2*C9)^((3*D9^2-D9-2)/(4*D9+4))*(D9*(D9-2)/2)^0,5
10	=A9+dt	=2^((301-D10)/D10)	=C9+G9	=D9	=H10+I10	=-1*(D10+1)*C10*(-2*E10*(2*C10)^((2/(D10+1))))^0,5	=F10*dt	=-1/2*(2*C10)^((D10^2-D10)/(2*D10+2))	=(2*C10)^((3*D10^2-D10-2)/(4*D10+4))*(D10*(D10-2)/2)^0,5

Abbildung 11: Formeln in der Tabellenkalkulation.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		dt	0,01						
3									
4	t	Z	rho	D	E_D	rho_punkt	drho	E_Da_cl_G	E_Da_Q
5	0	1	0,4592	301	-4,45E-07	-0,1308	-0,001308	-1,46E-06	1,02E-06
6	0,01	1	0,4578	301	-4,19E-07	-0,1265	-0,001265	-9,55E-07	5,36E-07
7	0,02	1,053	0,4566	280	-5,20E-07	-0,1308	-0,001308	-1,64E-06	1,12E-06
8	0,03	1,053	0,4553	280	-4,85E-07	-0,1260	-0,001260	-1,10E-06	6,14E-07
9	0,04	1,116	0,4540	260	-6,05E-07	-0,1303	-0,001303	-1,96E-06	1,36E-06
10	0,05	1,116	0,4527	260	-5,77E-07	-0,1269	-0,001269	-1,35E-06	7,78E-07
11	0,06	1,193	0,4514	240	-6,93E-07	-0,1280	-0,001280	-2,62E-06	1,93E-06
12	0,07	1,193	0,4502	240	-7,10E-07	-0,1292	-0,001292	-1,87E-06	1,16E-06
13	0,08	1,193	0,4489	240	-6,34E-07	-0,1218	-0,001218	-1,33E-06	6,93E-07
14	0,09	1,291	0,4476	220	-8,52E-07	-0,1291	-0,001291	-2,90E-06	2,05E-06
15	0,1	1,291	0,4464	220	-8,42E-07	-0,1279	-0,001279	-2,12E-06	1,28E-06
16	0,11	1,291	0,4451	220	-7,52E-07	-0,1206	-0,001206	-1,55E-06	7,98E-07

Abbildung 12: Tabellenkalkulation.

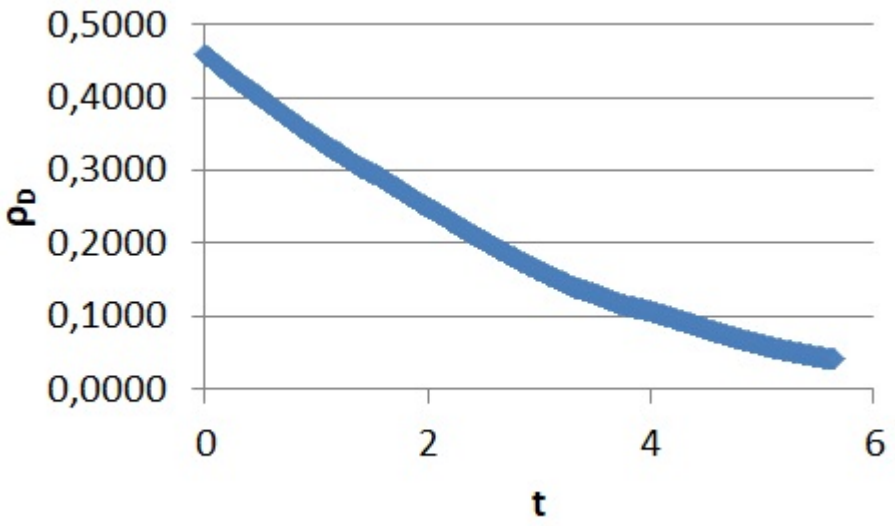


Abbildung 13: Graph zur Tabellenkalkulation, $\tilde{\rho}_D(\tilde{t})$: Die Dichte $\tilde{\rho}_D$ überstiegt nie den maximal möglichen Betrag 0,5.

b. Wir erstellen die Tabellenkalkulation (Abb. 14).

c. Wir erstellen die Tabellenkalkulation (Abb. 15). Dabei nimmt die Dichte $\tilde{\rho}_D$ aufgrund der Dynamik stetig ab, immer wenn eine Instabilitätsdichte $\tilde{\rho}_{D,ins}$ erreicht ist, wird die Dimension entsprechend geändert.

A68. Gesamter Zeitablauf:

a. Wir erstellen die Tabelle und den Graph (Abb. 16, 17).

b. Wir erstellen die Tabelle und erzeugen den Graphen (Abb. 18).

c. Wir erstellen die Tabelle und erzeugen den Graphen (Abb. 19).

8 Diskussion und Ausblick

Mit dem Buch *Wir entdecken die Geschichte des Universums mit eigenen Fotos und Experimenten* (Carmesin (2020)) können wir unser Universum selbst erkunden, mit eigenen Fotos, durch eigenständiges Experimentieren, mit einfachen Berechnungen oder mit den hier präsentierten Übungsaufgaben. Damit können wir uns selbst überprüfen, trainieren, weiter entwickeln und alle Ergebnisse komplett selbst ermitteln, bis zum kompletten Zeitablauf (s. Cover auf S. 2, s. Carmesin (2020) und Abb. 19): von der Planck-Länge bis zum Lichthorizont.

Unsere so gewonnenen Resultate stimmen präzise mit Beobachtungen überein. Dabei wenden wir nur die Gravitation und die Quantenphysik mithilfe etablierter mathematischer und numerischer Methoden an, mit den zugehörigen universellen Konstanten: Gravitationskonstante G, Lichtgeschwindigkeit c, Boltzmann-Konstante k_B sowie Plancks Konstante h. Das ist eine sachliche und klare Bestätigung unserer Ergebnisse.

Darauf aufbauend wurden wesentliche Geheimnisse der dunklen Energie, des Fine - Tuning - Problems und der dunklen Materie gelöst (Carmesin (2019)). Auch wurden das Horizontproblem und das Flachheit - Problem gelöst (Carmesin (2019)). Dazu wird es in Kürze einen weiteren Band in der

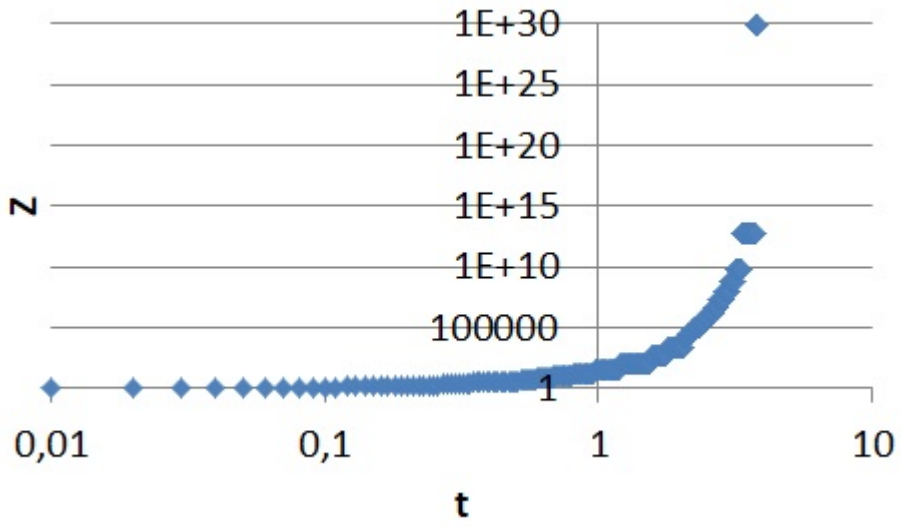


Abbildung 14: Graph zur Tabellenkalkulation, $Z_{D_{max} \to D}(\tilde{t})$. Dimensionale Übergänge werden bei $\tilde{\rho}_{D,c}(\tilde{t})$ modelliert: Der Faktor $Z_{D_{max} \to D}(\tilde{t})$ erklärt die extrem schnelle Distanzvergrößerung im frühen Universum.

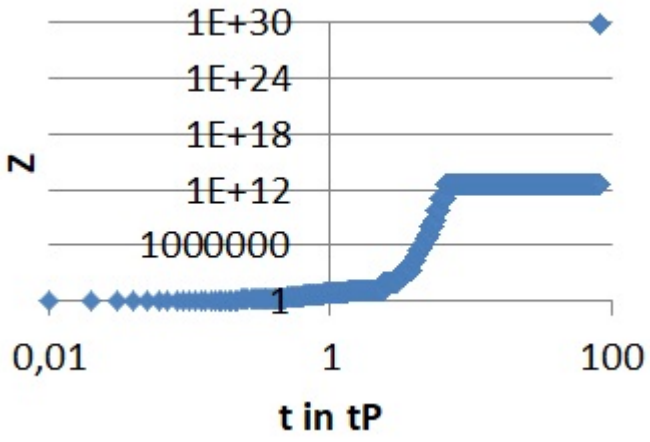


Abbildung 15: Graph zur Tabellenkalkulation, $Z_{D_{max} \to D}(\tilde{t})$. Dimensionale Übergänge werden bei $\tilde{\rho}_{D,ins}(\tilde{t})$ modelliert: Der Faktor $Z_{D_{max} \to D}(\tilde{t})$ erklärt die extrem schnelle Distanzvergrößerung im frühen Universum.

	A	B	C	D
8	tau	x	t in tP +79 tP	r in m
9	0,9503	1	7,67593E+60	4,14E+26
10	0,4024	0,5	3,25034E+60	2,07E+26
11	0,0374	0,1	3,02094E+59	4,14E+25
12	0,001146	1,00E-02	9,25667E+57	4,14E+24
13	2,96E-05	1,00E-03	2,38848E+56	4,14E+23
14	4,70E-07	1,00E-04	3,79475E+54	4,14E+22
15	5,14E-09	1,00E-05	4,14935E+52	4,14E+21
16	5,19E-11	1,00E-06	4,19135E+50	4,14E+20
17	5,19E-13	1,00E-07	4,19539E+48	4,14E+19
18	5,19E-15	1,00E-08	4,19539E+46	4,14E+18
19	5,20E-17	1,00E-09	4,1962E+44	4,14E+17
20	5,20E-19	1,00E-10	4,1962E+42	4,14E+16
21	5,20E-21	1,00E-11	4,1962E+40	4,14E+15
22	5,20E-23	1,00E-12	4,1962E+38	4,14E+14
23	5,20E-25	1,00E-13	4,1962E+36	4,14E+13
24	5,20E-27	1,00E-14	4,1962E+34	4,14E+12
25	5,20E-29	1,00E-15	4,1962E+32	4,14E+11
26	5,20E-31	1,00E-16	4,1962E+30	4,14E+10
27	5,20E-33	1,00E-17	4,1962E+28	4140000000
28	5,20E-35	1,00E-18	4,1962E+26	414000000
29	5,20E-37	1,00E-19	4,1962E+24	41400000
30	5,20E-39	1,00E-20	4,1962E+22	4140000
31	5,20E-41	1,00E-21	4,1962E+20	414000
32	5,20E-43	1,00E-22	4,1962E+18	41400
33	5,20E-45	1,00E-23	4,1962E+16	4140
34	5,20E-47	1,00E-24	4,1962E+14	414
35	5,20E-49	1,00E-25	4,1962E+12	41,4
36	5,20E-51	1,00E-26	41961974172	4,14
37	5,20E-53	1,00E-27	419619819,9	0,414
38	5,20E-55	1,00E-28	4196276,409	0,0414
39	5,20E-57	1,00E-29	42040,97409	0,00414
40	5,20E-59	1,00E-30	498,6197409	0,000414
41	5,20E-61	1,00E-31	83,19619741	0,0000414

Abbildung 16: Tabelle: Radius x bzw. r in Meter abhängig von $\tilde{t} + 79\, t_P$.

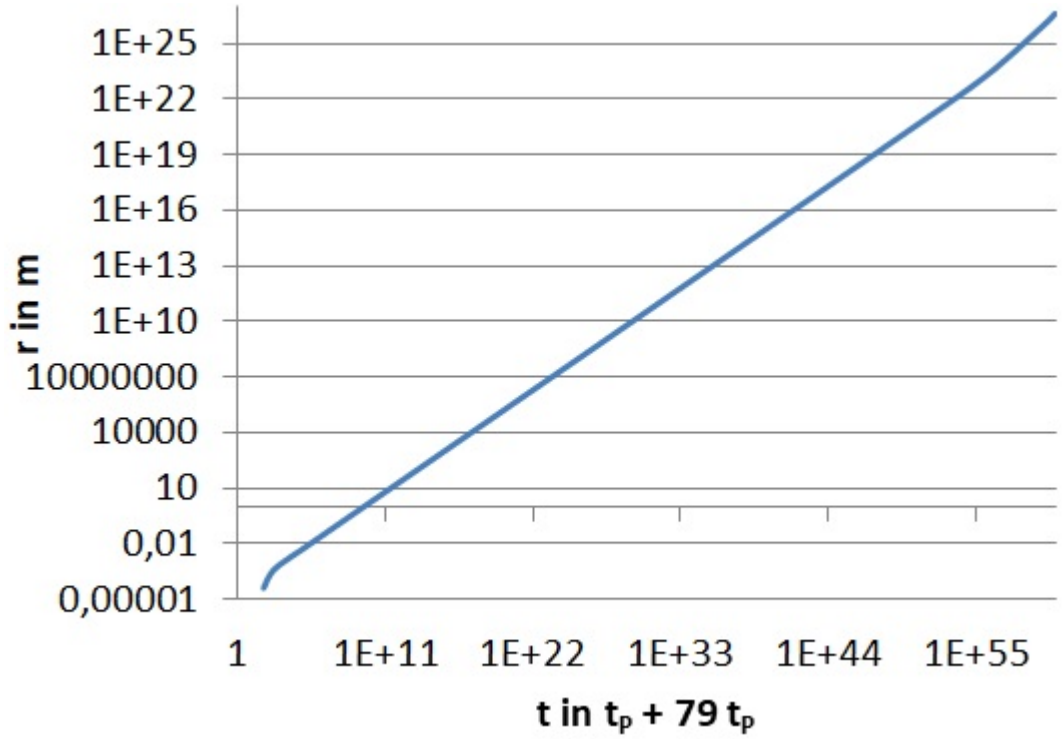


Abbildung 17: Graph: Radius x bzw. r in Meter abhängig von $\tilde{t} + 79\, t_P$.

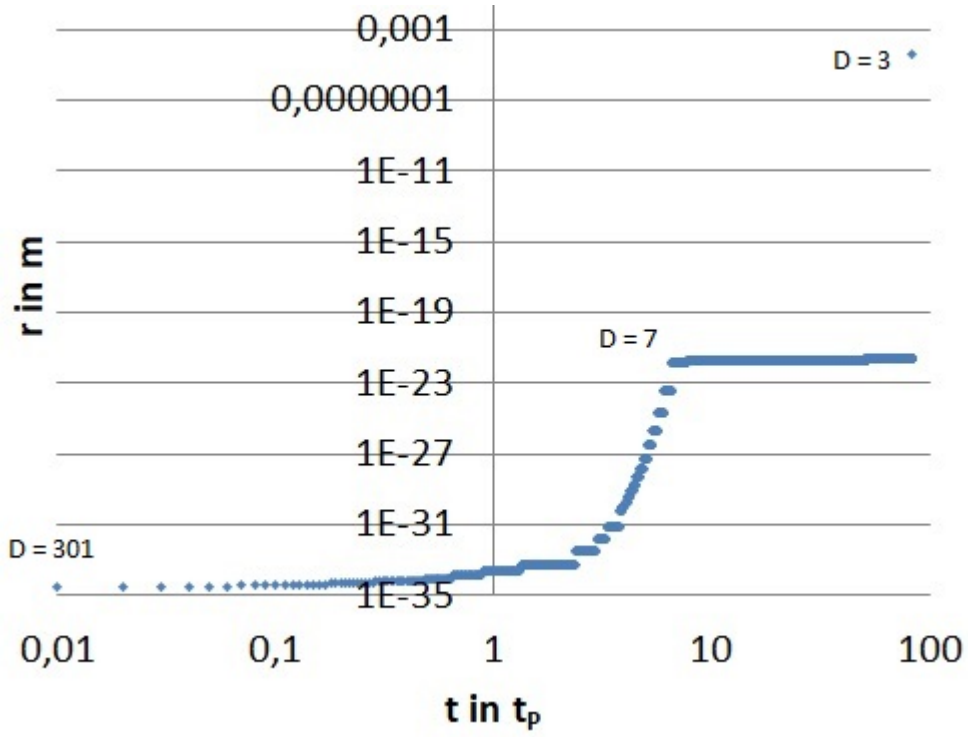


Abbildung 18: Graph: Radius r abhängig von $\tilde{t}$.

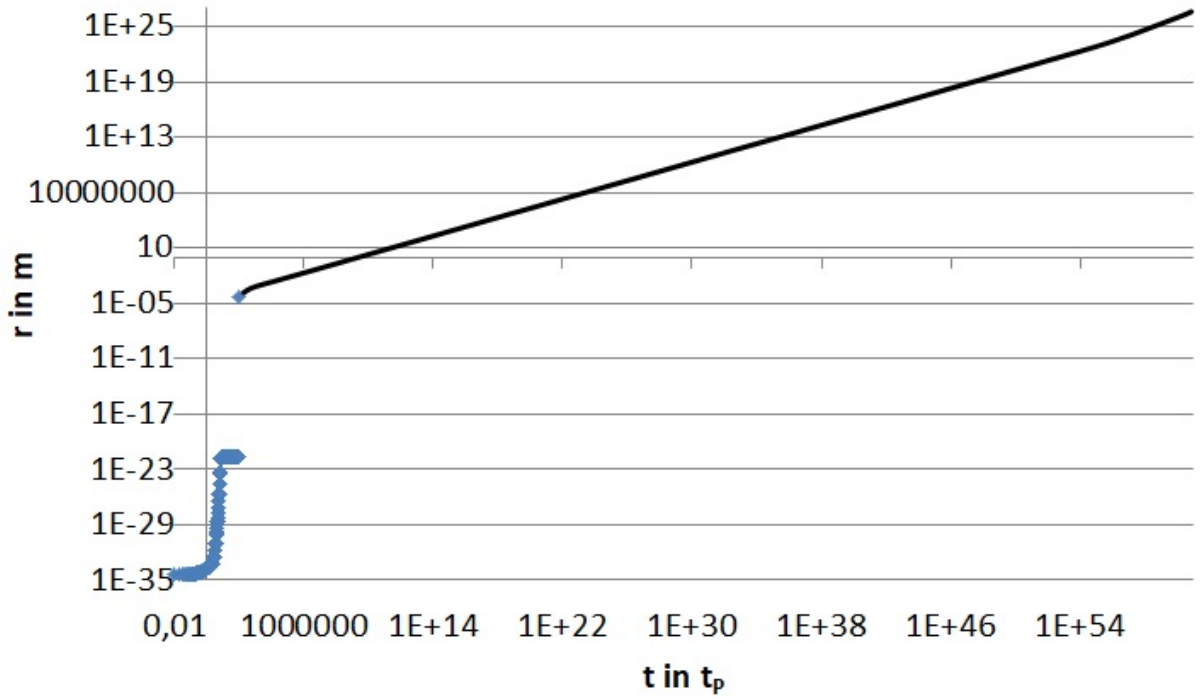


Abbildung 19: Graph: Zeitverlauf des Radius' r in Metern abhängig von $\tilde{t}$: von der Planck-Länge bis zum Lichthorizont (s. Cover auf S. 2 und in Carmesin (2019)).

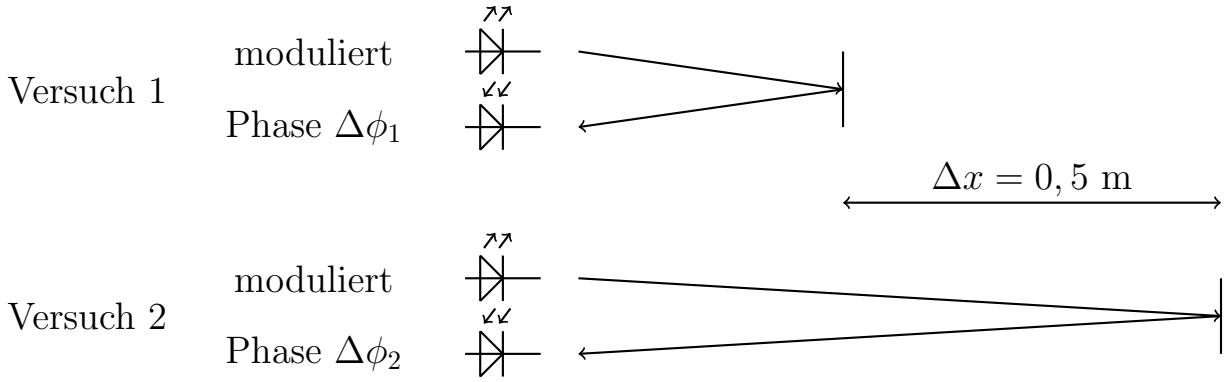


Abbildung 20: Versuch zum Ermitteln der Lichtgeschwindigkeit.

Buchreihe *Universe: Unified from Microcosm to Macrocosm*, der einen einfachen Zugang bietet.

Literatur

[Bos 1974] Bos, H. J. M.: Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus. In: *Archive for History of Exact Sciences* 14 (1974), S. 1–90

[Carmesin 2019] Carmesin, Hans-Otto: *Die Grundschwingungen des Universums - The Cosmic Unification - With 8 Fundamental Solutions based on G, c and h - With Answers to 42 Frequently Asked Questions.* Berlin : Verlag Dr. Köster, 2019

[Carmesin 2020] Carmesin, Hans-Otto: *Wir entdecken die Geschichte des Universums mit eigenen Fotos und Experimenten.* Berlin : Verlag Dr. Köster, 2020

9 Anhang

9.1 Wir messen die Lichtgeschwindigkeit

Im ersten Teilabschnitt messen wir die Lichtgeschwindigkeit in Luft. Dazu werden als Versuchsmaterial ein Oszilloskop und moduliertes Licht benötigt.

Im zweiten Teilabschnitt messen wir die Lichtgeschwindigkeit in Wasser. Dazu werden als Versuchsmaterial ein schon für unter 20 Euro erhältlicher Laser-Entfernungsmesser und ein hohes Gefäß mit Wasser benötigt (Abb. 22).

9.2 Wir messen die Lichtgeschwindigkeit in Luft

Wir senden ein Lichtsignal, dessen Amplitude Kosinus-förmig mit einer Frequenz von $f = 50$ MHz moduliert ist (Abb. 20). In einem ersten Versuch stellen wir das gesendete Signal und das reflektierte Signal auf zwei Kanälen eines Oszilloskops dar und lesen den Phasenunterschied $\Delta\phi_1$ ab (Abb. 21).

In einem zweiten Versuch verschieben wir den Reflektor um $\Delta x = 0,5$ m nach hinten. Dann stellen wir wieder das gesendete und das reflektierte Signal auf zwei Kanälen eines Oszilloskops dar und lesen den Phasenunterschied $\Delta\phi_2$ ab.

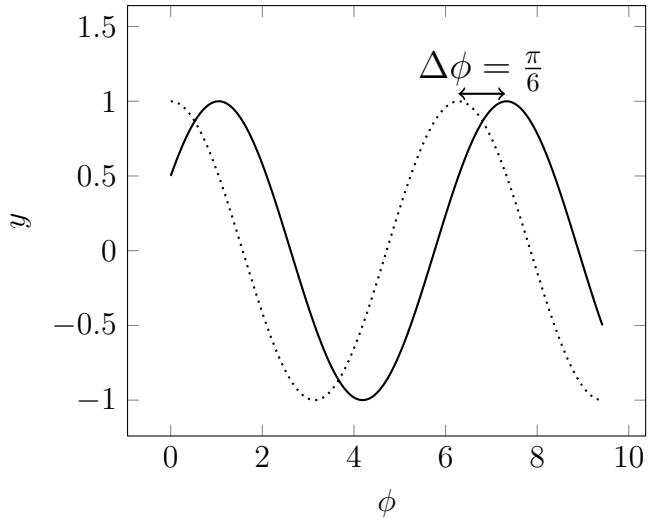


Abbildung 21: Versuch zum Ermitteln der Lichtgeschwindigkeit: Anzeige am Oszilloskop.

Dem Wegunterschied $\Delta s = 2 \cdot \Delta x = 1$ m entspricht der Phasenunterschied $\Delta\phi = \Delta\phi_2 - \Delta\phi_1$. Wir ermitteln am Oszilloskop $\Delta\phi = \frac{\pi}{3}$ (Abb. 21). Dem entspricht die Laufzeit $\Delta t = \frac{T}{6}$. Dabei ist die Periodendauer $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50}\mu$s. Dem entspricht die Laufzeit $\Delta t = \frac{T}{6}$. Daher beträgt die Laufzeit $\Delta t = \frac{1}{300}\mu$s.

Wir ermitteln die Lichtgeschwindigkeit:

$$c = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1 \text{ m}}{\frac{1}{300}\ \mu\text{s}} = 300\,000\ \frac{\text{km}}{\text{s}} \tag{127}$$

9.3 Wir messen die Lichtgeschwindigkeit in Wasser

Die heute kostengünstig verfügbaren Laser-Entfernungsmesser (Abb. 22, Hersteller Eventek, Typ W-60) ermitteln die Laufzeit im Prinzip genauso wie in unserem ersten Versuch gezeigt (Abb. 20, 21), wobei das Oszilloskop durch eine Elektronik zur Auswertung ersetzt ist. Bei einer Wassertiefe von 0,28 m und einer Länge von 0,11 m des Laser-Entfernungsmessers wird eine Entfernung von $s_{gemessen}$ =0,494 m angezeigt (Abb. 23). Dieser Anzeige entspricht folgende gemessene Laufzeit:

$$\Delta t_{gemessen} = \frac{s_{gemessen}}{c} = \frac{0,494 \text{ m}}{300\,000\ \frac{\text{km}}{\text{s}}} = 1,647 \text{ ns} \tag{128}$$

Von dieser gemessenen Laufzeit ordnen wir folgende Laufzeit der Länge des Laser-Entfernungsmessers zu

$$\Delta t_{Geraet} = \frac{0,11 \text{ m}}{c} = \frac{0,11 \text{ m}}{300\,000\ \frac{\text{km}}{\text{s}}} = 0,367 \text{ ns} \tag{129}$$

Dem Wasser ordnen wir die restlich Laufzeit zu

$$\Delta t_{Wasser} = 1,647 \text{ ns} - 0,367 \text{ ns} = 1,28 \text{ ns} \tag{130}$$

Abbildung 22: Versuch: Laser-Entfernungsmesser an einer Vase mit Wasser.

Daher ermitteln wir folgende Lichtgeschwindigkeit für Wasser:

$$c_{Wasser} = \frac{0,28 \text{ m}}{1,28 \text{ ns}} = 219\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}} \tag{131}$$

Der Literaturwert beträgt $c_{Wasser} = 225\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Somit beträgt unsere Messungenauigkeit $2,7\%$. Der Hersteller Eventek nennt für den verwendeten Entfernungsmesser vom Typ W-60 eine Messungenauigkeit vom 2 mm. Bei der untersuchten Entfernung von 280 mm macht das bereits 0,7 % aus. Bei der freihändigen Messung über der Wasseroberfläche gehen wir von einer weiteren Messungenauigkeit von 7 mm aus. Dem entspricht ein relativer Messfehler von 2,5 %. Beides zusammen erklärt gut die unsere ermittelte Messungenauigkeit von $2,7\%$.

9.4 Kritische Dichten

Tabelle 1: $\tilde{\rho}_{D,c}$ und $\tilde{\rho}_{D,ins}$.

D	$\tilde{\rho}_{D,c}$	$\tilde{\rho}_{D,ins}$
3	0.11569	
4		0.004455296
5		0.03487393
6		0.05736758
7	0.12435	0.07647015
8	0.13715	0.09350022
9	0.1493	0.1089679
10	0.16075	0.1231482
11	0.1715	0.1362208
12	0.1816	0.1483228
13	0.1911	0.1595649
14	0.2	0.1700387
15	0.20835	0.1798226
16	0.21625	0.1889856
17	0.2237	0.1975849
18	0.2307	0.2056743
19	0.23735	0.2132972
20	0.24365	0.2204939
21	0.2496	0.2273018
22	0.2553	0.233751
23	0.26065	0.2398708
24	0.2658	0.2456859
25	0.2707	0.2512199
26	0.2754	0.2564933
27	0.27985	0.261524
28	0.28415	0.2663296
29	0.28825	0.2709249
30	0.29215	0.2753251

Tabelle 2: $\tilde{\rho}_{D,c}$ und $\tilde{\rho}_{D,ins}$.

D	$\tilde{\rho}_{D,c}$	$\tilde{\rho}_{D,ins}$
31	2.959500e-001	2.795408e-001
32	2.995500e-001	2.835851e-001
33	3.030500e-001	2.874690e-001
34	3.064000e-001	2.912009e-001
35	3.096500e-001	2.947913e-001
36	3.127500e-001	2.982465e-001
37	3.157500e-001	3.015758e-001
38	3.186500e-001	3.047863e-001
39	3.214500e-001	3.078835e-001
40	3.241500e-001	3.108737e-001
41	3.267500e-001	3.137636e-001
42	3.292500e-001	3.165567e-001
43	3.317000e-001	3.192590e-001
44	3.341000e-001	3.218756e-001
45	3.364000e-001	3.244089e-001
46	3.386000e-001	3.268644e-001
47	3.408000e-001	3.292452e-001
48	3.429000e-001	3.315552e-001
49	3.449500e-001	3.337973e-001
50	3.469000e-001	3.359741e-001
51	3.488500e-001	3.380889e-001
52	3.507000e-001	3.401451e-001
53	3.525500e-001	3.421448e-001
54	3.543000e-001	3.440891e-001
55	3.560500e-001	3.459820e-001
56	3.577000e-001	3.478252e-001
57	3.593500e-001	3.496204e-001
58	3.609500e-001	3.513693e-001
59	3.625000e-001	3.530744e-001
60	3.640500e-001	3.547372e-001
61	3.655500e-001	3.563591e-001
62	3.670000e-001	3.579413e-001
63	3.684000e-001	3.594862e-001
64	3.698000e-001	3.609948e-001
65	3.711500e-001	3.624674e-001
66	3.724500e-001	3.639069e-001
67	3.737500e-001	3.653135e-001
68	3.750000e-001	3.666880e-001
69	3.762500e-001	3.680325e-001
70	3.774500e-001	3.693477e-001

Abbildung 23: Versuch: Vase mit Wasser.

Tabelle 3: $\tilde{\rho}_{D,c}$ und $\tilde{\rho}_{D,ins}$.

D	$\tilde{\rho}_{D,c}$	$\tilde{\rho}_{D,ins}$
71	3.786500e-001	3.706346e-001
72	3.798000e-001	3.718939e-001
73	3.809000e-001	3.731265e-001
74	3.820500e-001	3.743339e-001
75	3.831000e-001	3.755160e-001
76	3.842000e-001	3.766735e-001
77	3.852500e-001	3.778089e-001
78	3.862500e-001	3.789209e-001
79	3.872500e-001	3.800110e-001
80	3.882500e-001	3.810799e-001
100	4.046500e-001	3.988137e-001
120	4.165500e-001	4.116415e-001
140	4.256500e-001	4.213898e-001
160	4.328000e-001	4.290701e-001
180	4.386500e-001	4.352903e-001
200	4.434500e-001	4.404398e-001
220	4.475500e-001	4.447799e-001
240	4.510500e-001	4.484897e-001
260	4.540500e-001	4.517016e-001
280	4.567000e-001	4.545112e-001
300	4.590500e-001	4.569908e-001
301	4.591500e-001	4.571080e-001